線形不等式の計算

線形連立不等式の計算を改善するために RegularChains パッケージの LinearSolve コマンドが拡張されました。

- Fourier-Motzkin の消去法に基づいたより効率的なアルゴリズムが導入されました。
- 出力形式を制御するための 2 つの新しいオプション (canonical および projection) が追加されました。

以下の例では、多面体の計算を使用してこのコマンドと新しいオプションの使用法を説明します。

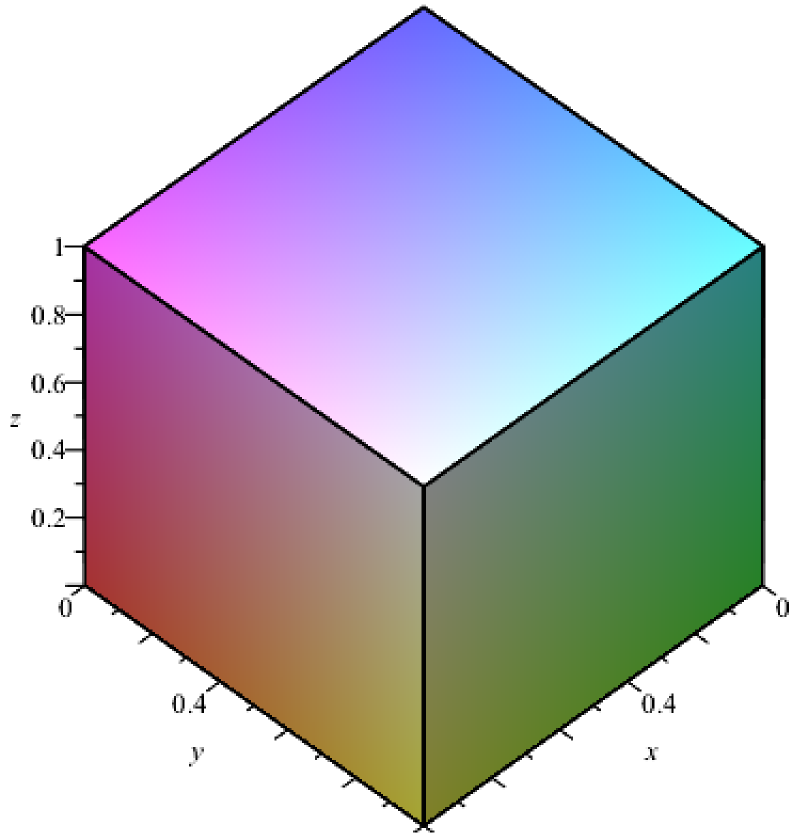
多面体の表現の変更

多面体を数学的に表現する方法は少なくとも 2 つあります。1 つは角を指定する方法で、もう 1 つは境界を示す超平面を指定する方法です。各辺の長さが 1 で 1 つの角が原点にあり、原点に隣接する 3 つの辺が 3 つの座標軸に平行している立方体を使用して説明します。

立方体のプロット:

$with(plots):$
$with(plottools):$

$display(cuboid([0, 0, 0], [1, 1, 1]), axes = boxed, labels = [x, y, z])$



平面を境界としてこの立方体を定義します。

$c1 := [x \geq 0, x \leq 1, y \geq 0, y \leq 1, z \geq 0, z \leq 1]$

$$[0 \leq x, x \leq 1, 0 \leq y, y \leq 1, 0 \leq z, z \leq 1] \tag{1.1}$$

Alternatively, define the vertices of the same cube:

$V := Matrix([[0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 0], [1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Suppose now that you are given the vertex representation and want to automatically derive the bounding planes representation. The cube is defined as the convex hull of all its vertices:

$op\left(convert\left(Vector_{row}([x, y, z]) =\sim add\left(\lambda_i \cdot V_i, i = 1..8\right), list\right)\right)$

$$x = \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8, y = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 + \lambda_8, z = \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_8 \tag{1.3}$$

$add\left(\lambda_i, i = 1..8\right) = 1$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 = 1 \tag{1.4}$$

$seq\left(\lambda_i \geq 0, i = 1..8\right)$

$$0 \leq \lambda_1, 0 \leq \lambda_2, 0 \leq \lambda_3, 0 \leq \lambda_4, 0 \leq \lambda_5, 0 \leq \lambda_6, 0 \leq \lambda_7, 0 \leq \lambda_8 \tag{1.5}$$

$seq\left(\lambda_i \leq 1, i = 1..8\right)$

$$\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_3 \leq 1, \lambda_4 \leq 1, \lambda_5 \leq 1, \lambda_6 \leq 1, \lambda_7 \leq 1, \lambda_8 \leq 1 \tag{1.6}$$

$sys := [\textbf{(1.3)}, \textbf{(1.4)}, \textbf{(1.5)}, \textbf{(1.6)}]:$

You can now use the LinearSolve command to eliminate all λ_i from this system of equations and inequalities. The projection option is used to specify that elimination is required, and the canonical option to eliminate redundant equations and inequalities.

$with(RegularChains) : with(SemiAlgebraicSetTools) :$

$vars := \left[seq\left(\lambda_i, i = 1..8\right), z, y, x\right]$

$$\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, z, y, x\right] \tag{1.7}$$

$LinearSolve(sys, PolynomialRing(vars), canonical, projection = 3)$

$$[0 \leq x, x \leq 1, 0 \leq y, y \leq 1, 0 \leq z, z \leq 1] \tag{1.8}$$

This agrees with the representation *c1* above.

双対多面体

すべての凸状 3 次元多面体には、角と面の役割が入れ替わる双対多面体が存在します。この立方体の双対多面体を計算します。原点を中心とした立方体を表現するところから始めます。

$c2 := [x \le 1, -x \le 1, y \le 1, -y \le 1, z \le 1, -z \le 1]$

$$[x \le 1, -x \le 1, y \le 1, -y \le 1, z \le 1, -z \le 1] \tag{2.1}$$

Now rewrite this in matrix form.

$B := Matrix([[1, 0, 0], [-1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, -1, 0], [0, 0, 1], [0, 0, -1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$v := Vector([x, y, z])$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$c := Vector([1, 1, 1, 1, 1, 1])$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$B.v \le \sim c$

$$\begin{bmatrix} x \le 1 \\ -x \le 1 \\ y \le 1 \\ -y \le 1 \\ z \le 1 \\ -z \le 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

In general, if a bounded convex polyhedron is given by a set of inequalities of the form $B.v \le 1$, then the vertices of its dual are exactly the columns of the matrix B.

The convex hull of these six vertices defines an octahedron. Using the same method as before, compute the bounding planes for this octahedron.

$op\left(convert\left(Vector_{row}([x, y, z]) =\sim add\left(\lambda_i \cdot B_i, i=1..6\right), list\right)\right)$

$$x=\lambda_1-\lambda_2, y=\lambda_3-\lambda_4, z=\lambda_5-\lambda_6 \tag{2.6}$$

$add\left(\lambda_i, i=1..6\right)=1$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6=1 \tag{2.7}$$

$seq\left(\lambda_i \geq 0, i=1..6\right)$

$$0 \leq \lambda_1, 0 \leq \lambda_2, 0 \leq \lambda_3, 0 \leq \lambda_4, 0 \leq \lambda_5, 0 \leq \lambda_6 \tag{2.8}$$

$seq\left(\lambda_i \leq 1, i=1..6\right)$

$$\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_3 \leq 1, \lambda_4 \leq 1, \lambda_5 \leq 1, \lambda_6 \leq 1 \tag{2.9}$$

$sys := [\mathbf{(2.6)}, \mathbf{(2.7)}, \mathbf{(2.8)}, \mathbf{(2.9)}]:$

$vars := \left[seq\left(\lambda_i, i=1..6\right), z, y, x\right]$

$$\left[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, z, y, x\right]$$

$S := LinearSolve(sys, PolynomialRing(vars), canonical, projection=3)$

$$[-1 \leq x, x \leq 1, -x-1 \leq y, -1+x \leq y, y \leq 1+x, y \leq 1-x, -y-x-1 \leq z, -y+x-1 \leq z, -1-x+y \leq z, -1+x+y \leq z, z \leq y+x+1, z \leq y-x+1, z \leq 1+x-y, z \leq 1-x-y] \tag{2.11}$$

The first two inequalities represent that projection of the octahedron onto the x axis:

$S_{1..2}$

$$[-1 \leq x, x \leq 1] \tag{2.12}$$

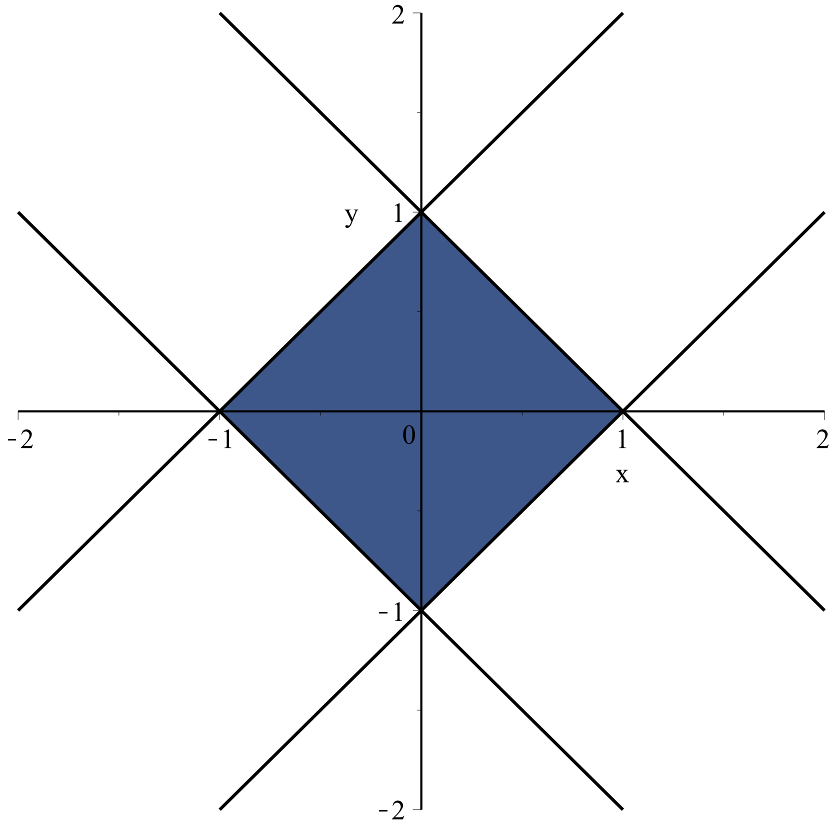
Together with the following four inequalities, which involve only x and y but not z, this defines the projection of the octahedron onto the x, y-plane:

$S_{1..2}; S_{3..6}$

$$[-1 \leq x, x \leq 1]$$
$$[-x-1 \leq y, -1+x \leq y, y \leq 1+x, y \leq 1-x] \tag{2.13}$$

次のプロットは、この射影 (青) と 4 本の境界線を示しています。

$inequal\left(S_{3..6}, x=-2..2, y=-2..2\right)$



Finally, the last 8 inequalities, i.e., the ones containing z, define the bounding planes of the octahedron.

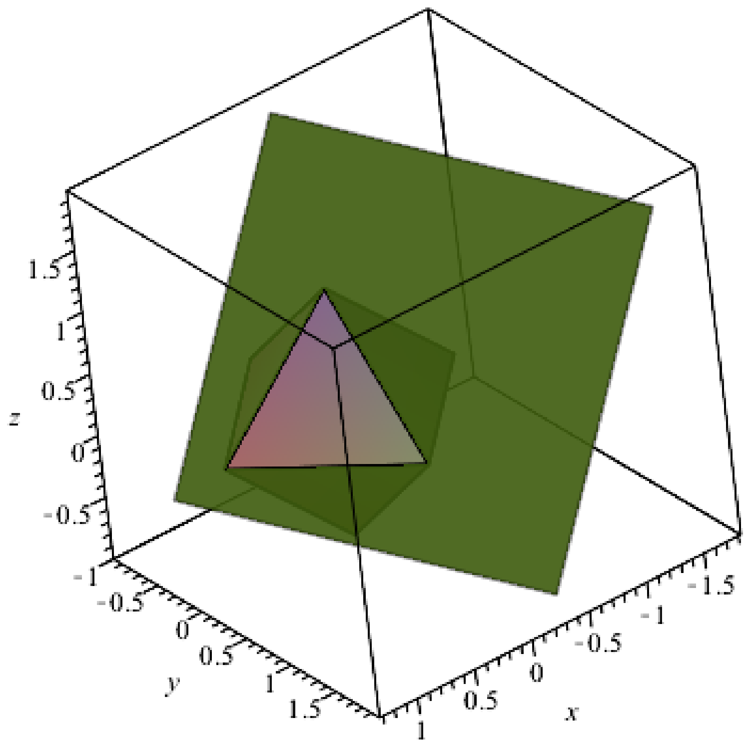
$S_{-8..-1}$

$$[-y-x-1 \leq z, -y+x-1 \leq z, -1-x+y \leq z, -1+x+y \leq z, z \leq y+x+1, z \leq y-x+1, z \leq 1+x-y, z \leq 1-x-y] \tag{2.14}$$

次の 3-D プロットは、4 面体と最終的なこれら 8 つの境界平面を示しています。マウスを使用してプロットを回転することで、この平面が実際にいずれかの面に接していることを確認できます。

$plane := Student:\text{-}LinearAlgebra:\text{-}PlanePlot\big((lhs - rhs)(S_{-1}) = 0, [x, y, z], caption = \text{""}, shownormal = false, showpoint = false, planeoptions = [transparency = 0.3]\big):$

$display(octahedron([0, 0, 0]), plane, axes = boxed, labels = [x, y, z])$



参照

RegularChains[SemiAlgebraicSetTools][LinearSolve]