Maple を利用した 超越方程式の解法について

四ツ谷晶二（龍谷大・理工）

Maple Academic Conference 2012　数学編
日時：2012 年10 月15 日（月）13:15～16:40
アキバプラザ（秋葉原）

話の内容

- はじめに
- 指数関数を含む超越方程式の解法
- 完全楕円積分を含む超越方程式の解法
- おわりに

代数方程式：　１次方程式，２次方程式，・・・

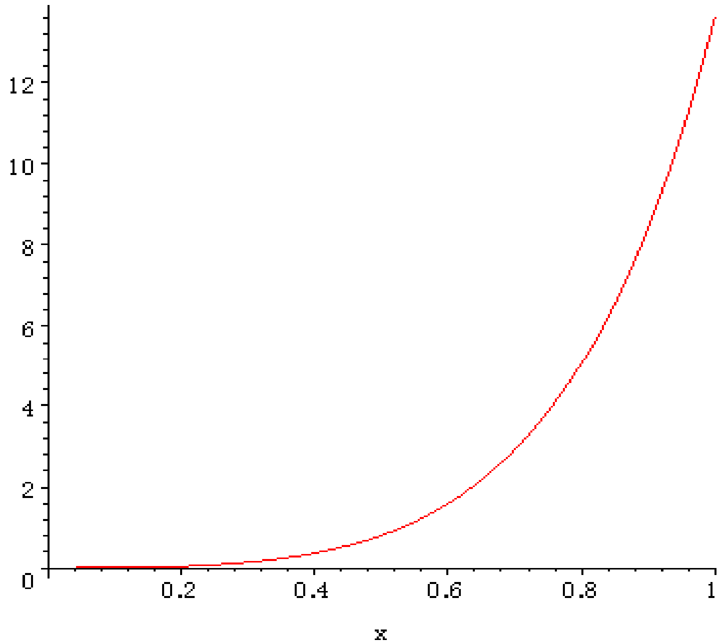
超越方程式：　指数関数，三角関数，・・・　を含む

例題　a を実数とする．次の超越方程式の閉区間 [0,1] における実数解の個数を調べよ．

$$\mathrm{x}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+(1+x)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-x-\frac{5}{2}x^2-x^4=a$$

解答の考え方

$$f(x) := x\,e^{3x} - e^{2x} + (1+x)e^{x} - x - \frac{5}{2}x^{2} - x^{4}$$

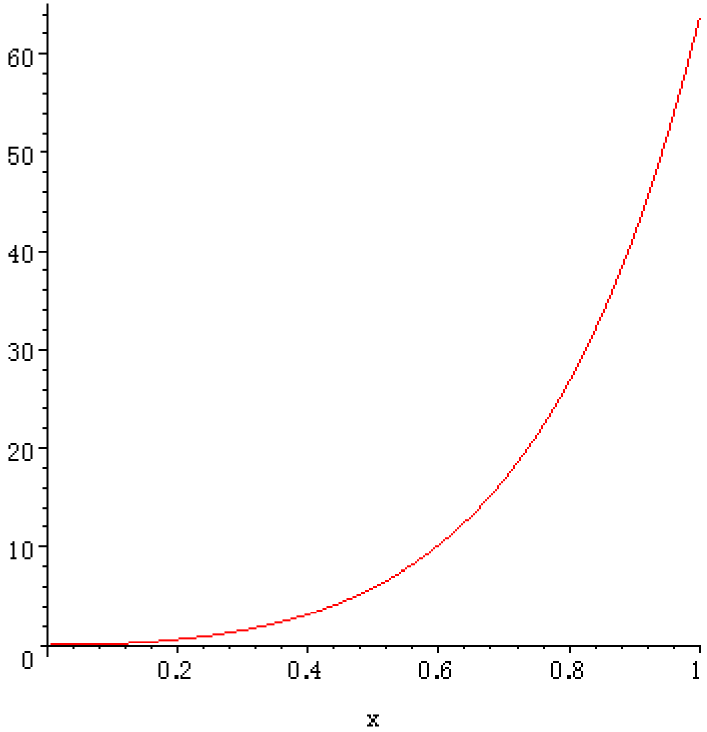


f(x) のグラフは閉区間 [0,1]で単調増加のようである.

このことを証明しよう！

$$f(x) := x\,e^{3x} - e^{2x} + (1+x)e^{x} - x - \frac{5}{2}x^{2} - x^{4}$$

$$f'(x) = (1+3x)e^{3x} - 2e^{2x} + (2+x)e^{x} - 1 - 5x - 4x^{3}$$



$f(0)=0.$ $f'(x)>0$ *on* $(0,1]$ のようである.

このことを証明したい！

$$f(x) := x e^{3x} - e^{2x} + (1+x)e^{x} - x - \frac{5}{2}x^{2} - x^{4}$$

$$f'(x) = (1+3x)e^{3x} - 2e^{2x} + (2+x)e^{x} - 1 - 5x - 4x^{3}$$

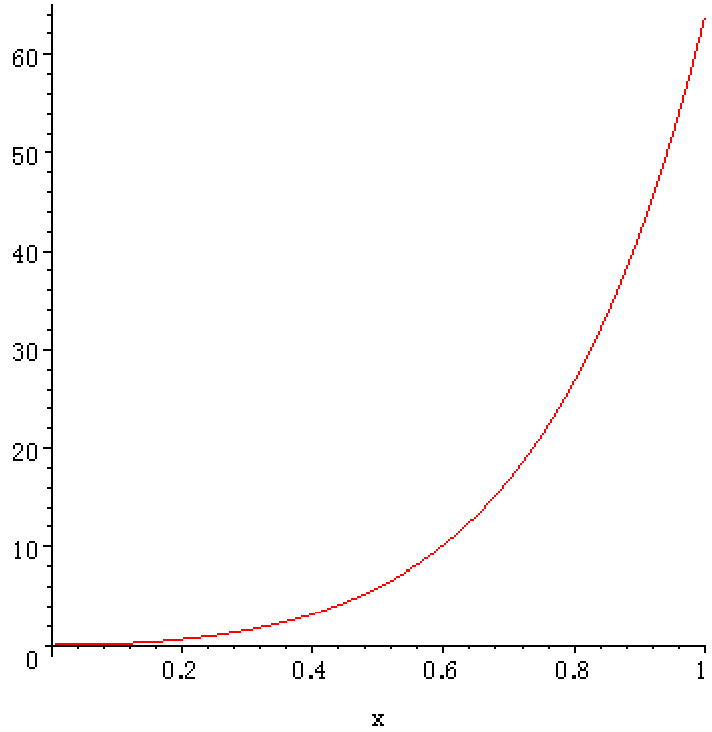
$$f''(x) = (6+9x)e^{3x} - 4e^{2x} + (3+x)e^{x} - 5 - 12x^{2}$$

微分していっても，永遠に指数関数が残り，

手に負えない！

発想の転換が必要！

$$g(x) = (1+3x)e^{3x} - 2e^{2x} + (2+x)e^{x} - 1 - 5x - 4x^{3}$$



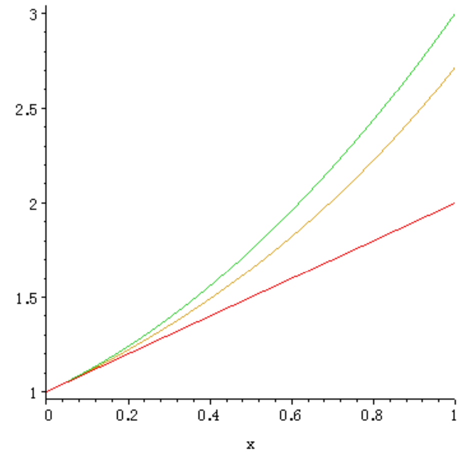
g(0)=0.

g(x)>0 on (0,1] を直接証明する！

$$g(x) = (1+3\mathrm{x})\mathrm{e}^{3\mathrm{x}} - 2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + (2+x)\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1 - 5x - 4x^3$$

変数を増やして考える！

$$P(x,y) := (1+3\mathrm{x})\,\mathrm{y}^3 - 2\mathrm{y}^2 + (2+x)y - 1 - 5x - 4x^3$$



<u>注意すべきこと</u>

$$P(x, e^x) = g(x)$$

$$1 + x \le e^x \le 1 + x + x^2 \;\; on\,[0,1]$$

$$P(x,y) > 0 \; (0 < x \le 1,\; 1 + x \le y \le 1 + x + x^2) \Rightarrow g(x)(0 < x \le 1)$$

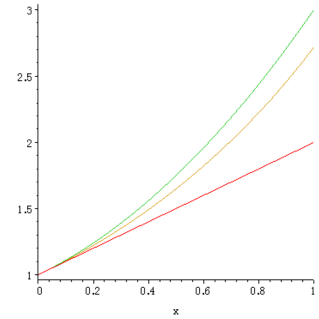
したがって

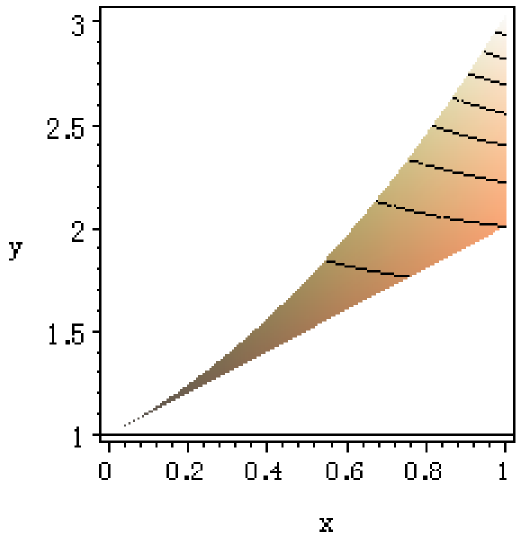
$P(x,y) > 0 \; (0 < x \le 1,\; 1 + x \le y \le 1 + x + x^2)$ **を示せばよい**

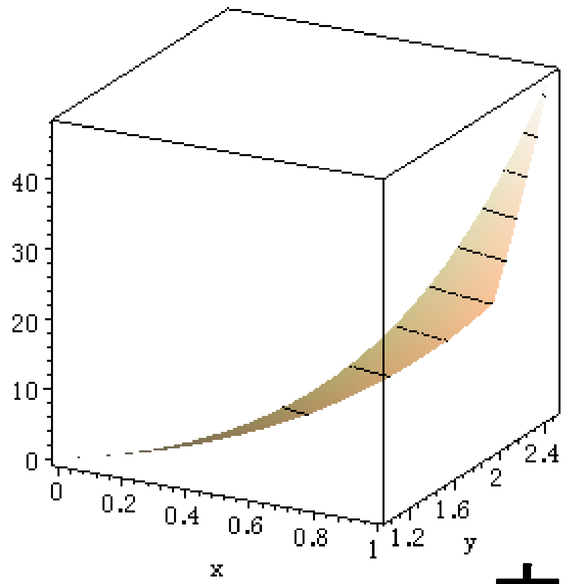
$$P(x,y) := (1+3x)y^3 - 2y^2 + (2+x)y - 1 - 5x - 4x^3$$

$$P(x,y) > 0 \quad \left(0 < x \leq 1,\ 1+x \leq y \leq 1+x+x^2\right)$$

を示したい.

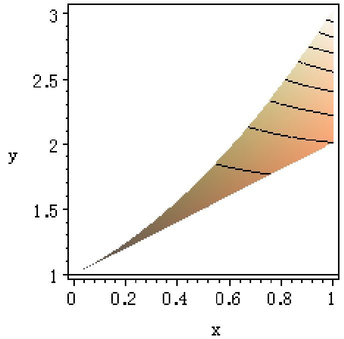


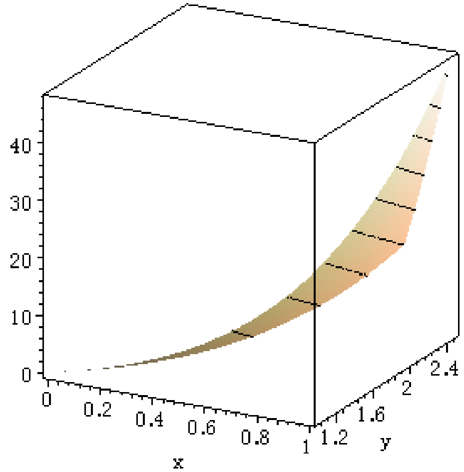




大丈夫そう！

$$P(x,y) := (1+3x)\,y^3 - 2y^2 + (2+x)y - 1 - 5x - 4x^3$$
$$\left(0<x\le 1,\ 1+x\le y\le 1+x+x^2\right)$$





次の4つのことを示せばよい.

$$P(x, 1+x) > 0 \qquad for\ \ 0 < x \le 1$$

$$P\left(x, 1+x+x^2\right) > 0 \quad for\ \ 0 < x \le 1$$

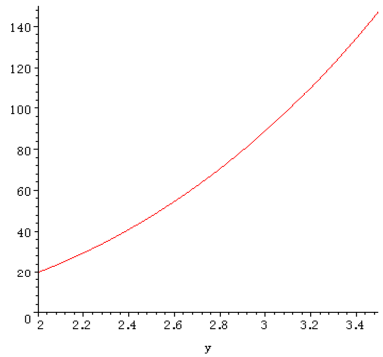
$$P(1, y) > 0 \qquad for\ \ 2 < y \le 3$$

領域の内部に停留点 は存在しない.

$$P(x,1+x)= x^2\ (11+6x+3x^2) > 0 \quad on\ (0,1]$$

$$P(x,1+x+x^2)$$
$$=x^2(12+18x+25x^2+21x^3+10x^4+3x^5)>0 \quad on\,(0,1]$$

$$P(1,y)=4y^3-2y^2+3y-10>0 \quad on(2,3]$$



スツルム列

$$\left[y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{4}y-\frac{5}{2},\ y^2-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4},\ -y+\frac{177}{32},\ -1\right]$$

符号変化数の差

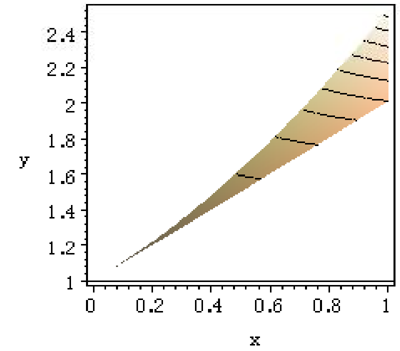
$V(2)-V(3)=2-2=0$ **区間(2,3]での実数解の個数＝0**

スツルムの定理

「領域の内部に停留点 は存在しない」ことを示す.

$$P_x(x, y) = 3y^3 + y - 5 - 12x^2$$

$$P_y(x, y) = 3y^2 + 9y^2 x - 4y + 2 + x$$



グレブナー基底

$$-53 + 193y - 426y^2 + 309y^3 - 513y^4 + 135y^5 + 243y^7$$

$$63 - 327y + 111y^2 - 624y^3 + 144y^4 + 135y^5 + 324y^6 + 164x$$

上式が同時に0となる点 (x,y) =(-0.1・・, 1.1・・)

領域外!

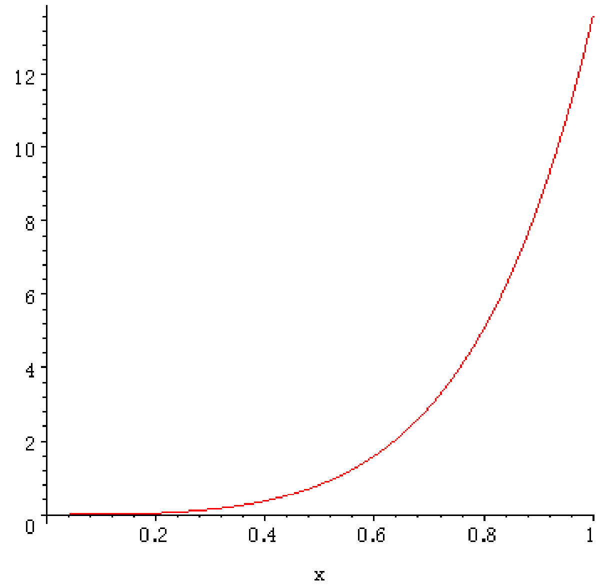
<u>例題</u>　**a を実数とする．次の超越方程式の閉区間 [0,1] における実数解の個数を調べよ．**

$$x e^{3x} - e^{2x} + (1+x)e^{x} - x - \frac{5}{2}x^{2} - x^{4} = a$$

<u>答</u>

$0 \leq a \leq e^{3} - e^{2} + 2e - 9/2$ のとき　１ 個

その他のとき　　０ 個



完全楕円積分を含む超越方程式

Notations: **complete elliptic integrals**

$$\begin{cases} K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k\in[0,1) \\ E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \qquad k\in[0,1) \\ \Pi(\mu,k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\varphi}{(1+\mu\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k\in[0,1) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dk}K(k) = \frac{E(k)}{(1-k^2)k} - \frac{K(k)}{k}, \quad \frac{d}{dk}E(k) = \frac{E(k)}{k} - \frac{K(k)}{k},$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\Pi(\nu,k) = \frac{kE(k)}{(k^2+\nu)(1-k^2)} - \frac{k\Pi(\nu,k)}{k^2+\nu},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\Pi(\nu,k) = \frac{(k^2-\nu^2)\Pi(\nu,k)}{2(1+\nu)(k^2+\nu)\nu} - \frac{K(k)}{2(1+\nu)\nu} + \frac{E(k)}{2(1+\nu)(k^2+\nu)}.$$

$$\boxed{K(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}$$

$$\boxed{E(k) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi}$$

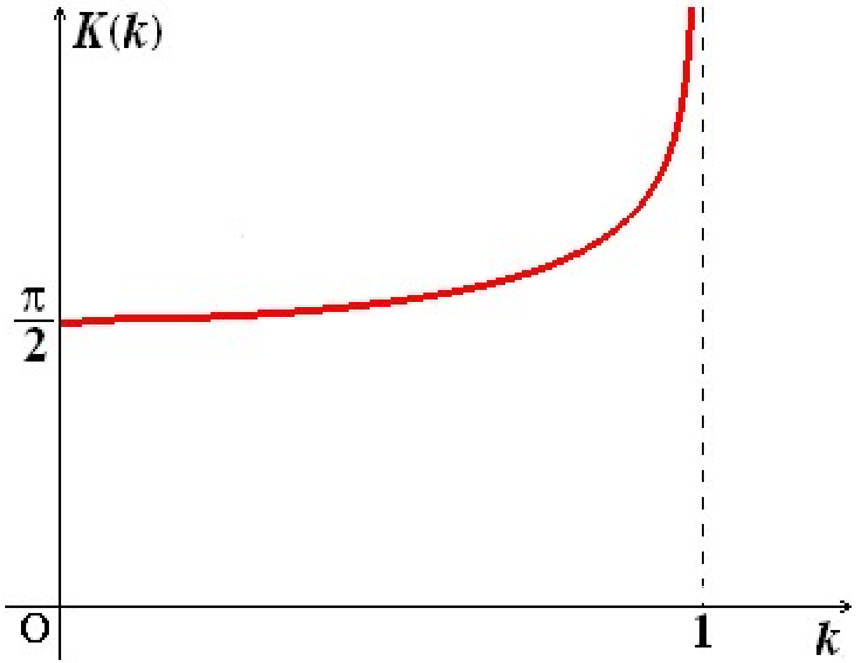
$$K(0) = \frac{\pi}{2}$$

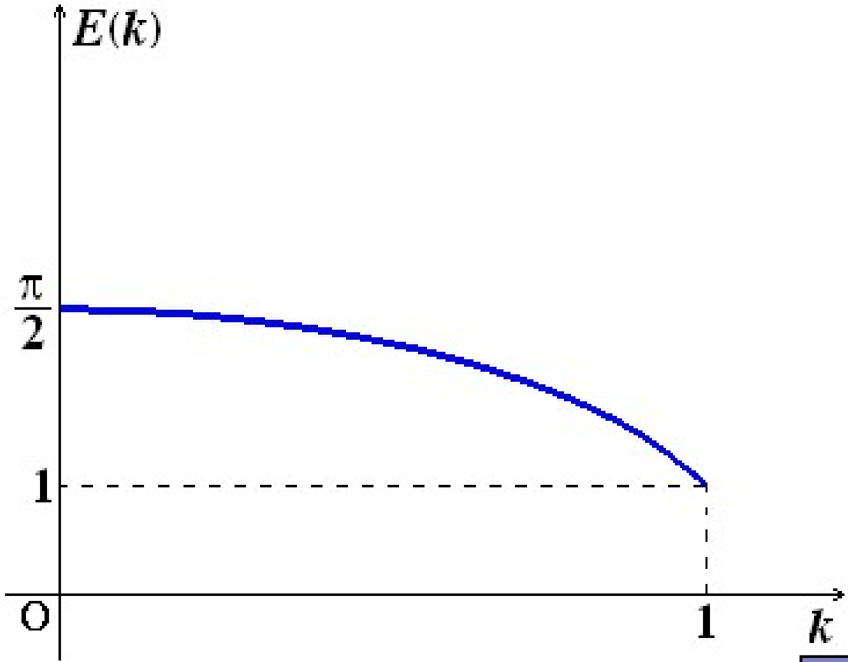
$$K(k) \to \infty,$$

$$(1-k^2)K(k) \to 0 \quad \text{as} \quad k \uparrow 1$$

$$E(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$E(1) = 1$$





Problem Prove

$$\left(h^2-h+1\right)\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^4-2\left(h-1\right)\left(h-2\right)\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^3+$$

$$6\left(h-1\right)^2\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^2+2\left(h-2\right)\left(h-1\right)^2\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)-\left(h-1\right)^3$$

$$>0 \quad (0<h<1)$$

Problem Prove

$$\left(h^2-h+1\right)\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^4-2\left(h-1\right)\left(h-2\right)\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^3+$$

$$6\left(h-1\right)^2\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)^2+2\left(h-2\right)\left(h-1\right)^2\left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})}\right)-\left(h-1\right)^3$$

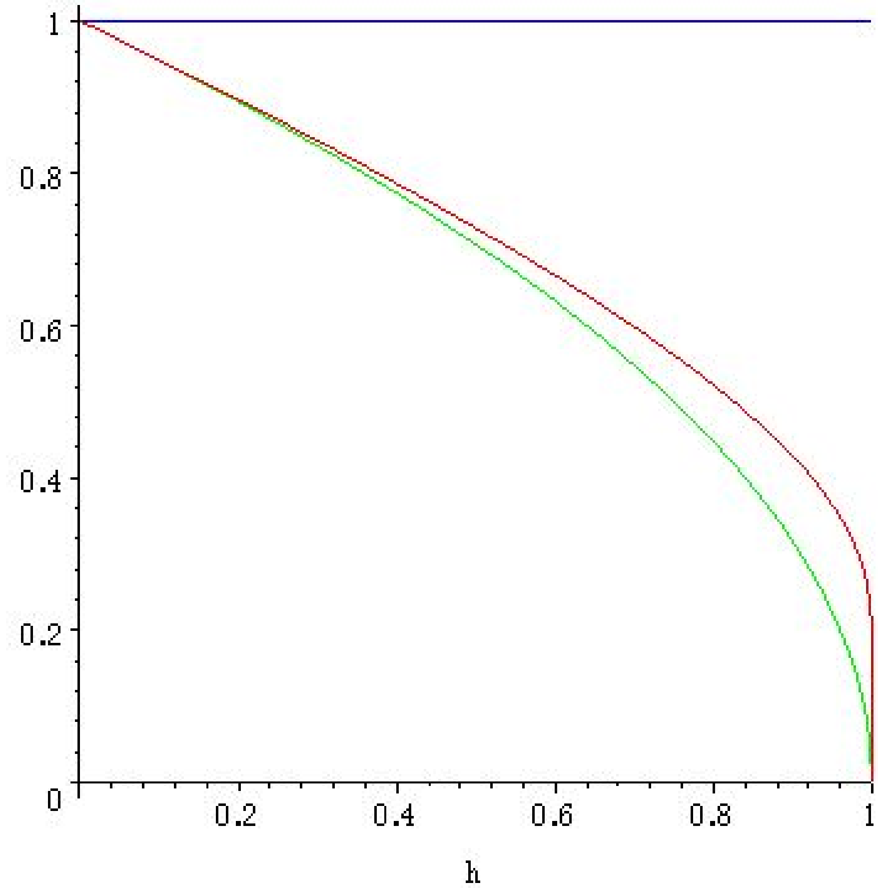
$$>0 \quad (0<h<1)$$

Problem Prove

$$R\left(h, \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} \right) > 0 \qquad (h \in (0,1))$$

where

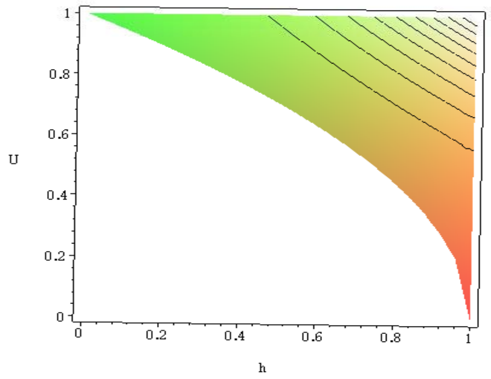
$$R(h,U) := (h^2 - h + 1)U^4 - 2(h-1)(h-2)U^3 + 6(h-1)^2 U^2 + 2(h-2)(h-1)^2 U - (h-1)^3$$

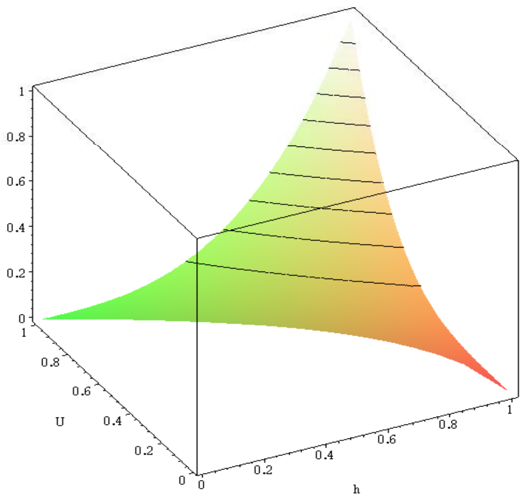


$$\left(0 \le h \le 1, \sqrt{1-h} \le \frac{E\left(\sqrt{h}\right)}{K\left(\sqrt{h}\right)} \le 1\right)$$

We may show that

$R(h,U) > 0 \qquad (h,U) \in$

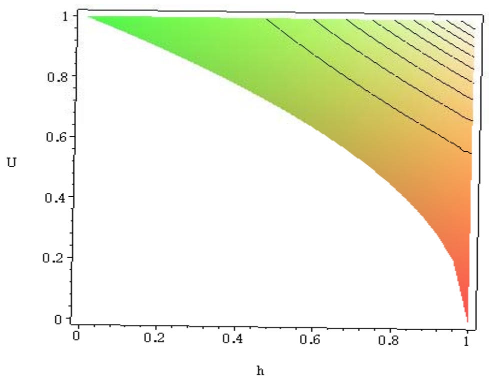




$$R(h,U) := (h^2 - h + 1)U^4 - 2(h-1)(h-2)U^3 + 6(h-1)^2 U^2$$
$$+ 2(h-2)(h-1)^2 U - (h-1)^3$$

$$R(h,U) := (h^2 - h + 1)U^4 - 2(h-1)(h-2)U^3 + 6(h-1)^2 U^2$$
$$+ 2(h-2)(h-1)^2 U - (h-1)^3$$

$$R(1,U) = U^4 > 0, \quad R(h,1) = h^3 > 0$$
$$R\left(h, \sqrt{1-h}\right) = (1-h)^2 \left(1 - \sqrt{1-h}\right)^4 > 0$$



$$R_h\left(h,U\right)=2U^4h-U^4-4U^3h+6U^3+12U^2h-12U^2+6Uh^2-16Uh$$
$$+10U-3h^2+6h-3=0$$

$$R_U\left(h,U\right)=4U^3h^2-4U^3h+4U-6U^2h^2+18U^2h-12U^2+12Uh^2$$
$$-24Uh+12U+2h^3-8h^2+10h-4=0$$

Groebner's *basis*

$$h^3\left(2h-1\right)\left(h-1\right)^3\left(125h^4-250h^3+621h^2-496h+128\right)=0$$

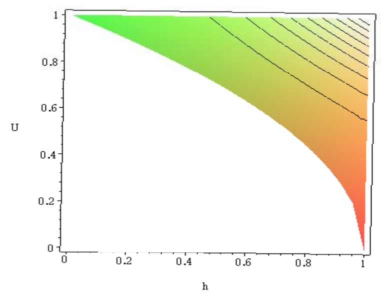
$$-h(h-1)(4250h^7-14875h^6+34989h^5-50285h^4+34237h^3-8508h^2-192h-384U+384)=0$$

$$864U^3+2592U^2h+257046h^7-217935h^4+42251h^3$$
$$-437661h^6+432435h^5+1728h^2-864-99000h^8$$
$$+22000h^9-2592Uh+2592U-2592U^2=0$$

It holds that $125h^4-250h^3+621h^2-496h+128>0\ (0<h<1)$

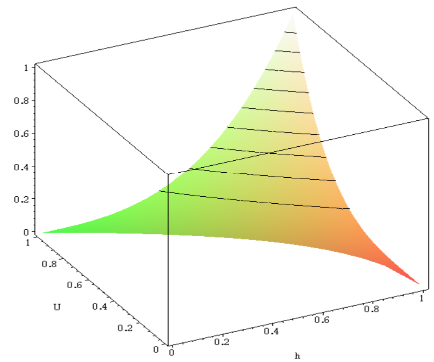
Sturm's Theorem

$$h=\frac{1}{2},\quad U=\frac{1}{2}$$



これは領域外

$$\therefore R(h,U)>0$$



Theorem [MMY2010]　関数 $\underline{g}_n(h), \overline{g}_n(h)$ を

$$\underline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell-1} c_\ell^2 - 2^{n-1} c_n^2, \qquad \overline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell-1} c_\ell^2$$

で定義する．このとき，次の事実が成立する．

1) 任意の非負の整数 n に対して, 次の評価式が成り立つ:

$$\underline{g}_n(h) \le \mathrm{E}(\sqrt{h})/\mathrm{K}(\sqrt{h}) \le \overline{g}_n(h) \quad h \in [0,1].$$

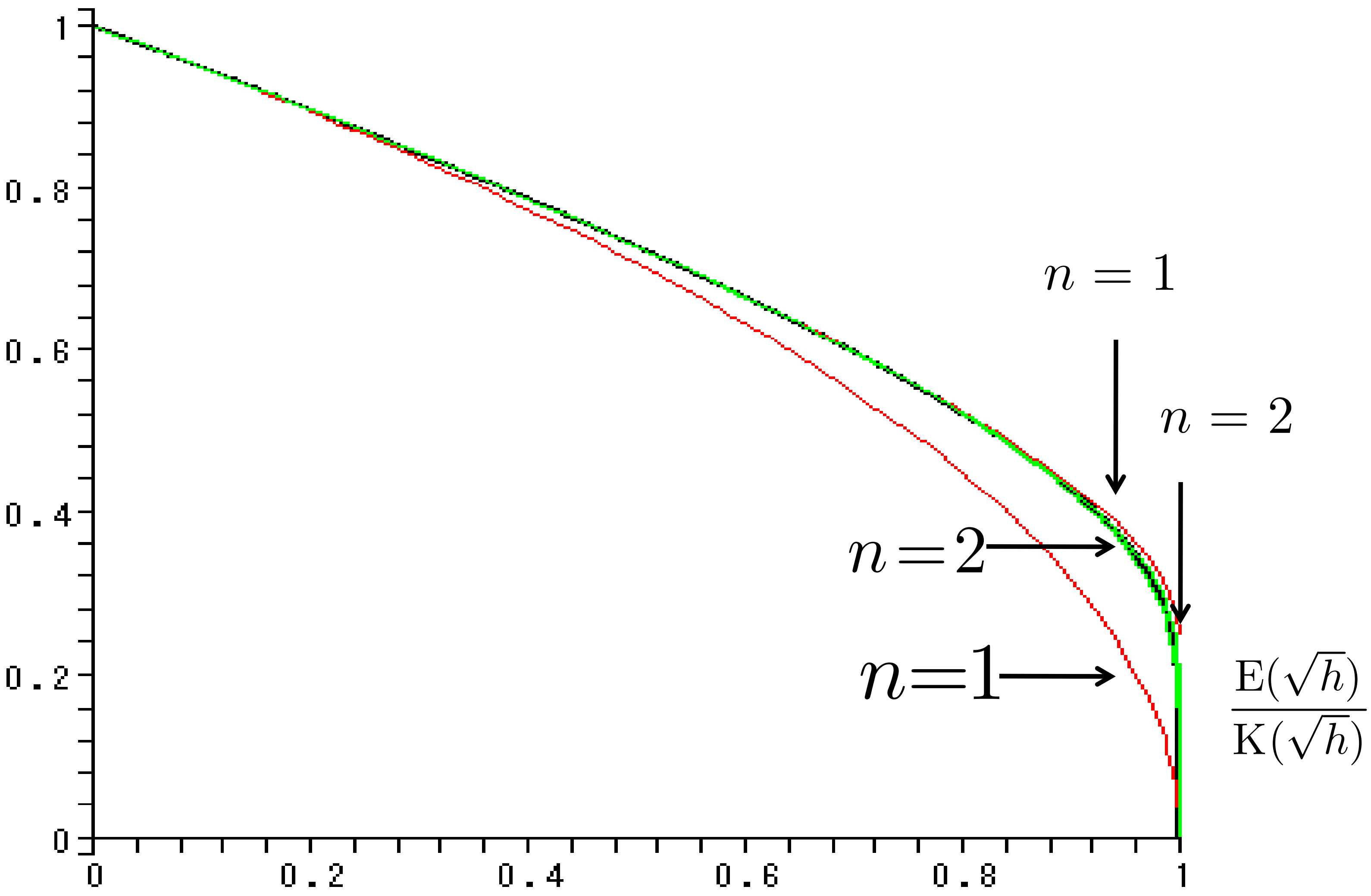
なお，$\underline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0, 1$ の場合のみであり, $\overline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0$ の場合のみである.

2) $\underline{g}_n(h),\ \overline{g}_n(h) \quad \rightrightarrows \quad \mathrm{E}(\sqrt{h})/\mathrm{K}(\sqrt{h}) \quad uniformly\ on\ [0,1] \quad as\ n \to \infty.$

具体的に，$\underline{g}_n(h),\ \overline{g}_n(h)\ (n = 1, 2, 3)$ を示す.

$$\begin{aligned}
\underline{g}_0(h) &= 1 - h, \\
\underline{g}_1(h) &= (1-h)^{1/2}, \\
\underline{g}_2(h) &= (1-h)^{1/4} + (1-h)^{3/4} \\
&\quad -(1-h)^{1/2},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\overline{g}_0(h) &= 1 - \frac{h}{2}, \\
\overline{g}_1(h) &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{(1-h)^{1/2}}{2}, \\
\overline{g}_2(h) &= \frac{1}{4} - \frac{h}{8} - \frac{(1-h)^{1/2}}{4} \\
&\quad + \frac{(1-h)^{1/4}}{2} + \frac{(1-h)^{3/4}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\underline{g}_n(h) \le \frac{\mathrm{E}(\sqrt{h})}{\mathrm{K}(\sqrt{h})} \le \overline{g}_n(h)$$



任意の $a > b > 0$ に対して，算術・幾何平均の漸化式

$$a_{\ell+1} = \frac{a_\ell + b_\ell}{2}, \quad b_{\ell+1} = \sqrt{a_\ell b_\ell}, \quad c_{\ell+1} = \frac{a_\ell - b_\ell}{2} \quad (\ell = 0,1,2,3,\cdots)$$

$$a_0 = a, \ b_0 = b, \ c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

を考える．極限値を AGM(a,b) とかく．1818年，Gauss は次を得た ([TI2007], [E1976])．

Theorem A. $a = 1$, $b = \sqrt{1-h}$ とする．このとき，

$$\frac{\mathrm{E}(\sqrt{h})}{\mathrm{K}(\sqrt{h})} = 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell-1} c_\ell^2.$$

$$\frac{\mathrm{E}(\sqrt{h})}{\mathrm{K}(\sqrt{h})} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} {c_n}^2$$

比較関数のつくり方

$$1 - \sum_{n=0}^{N} 2^{n-1} {c_n}^2 = \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \sum_{n=0}^{N} 2^{n-1} {c_n}^2\right) + \left(1 - \sum_{n=0}^{N} 2^{n-1} {c_n}^2\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \sum_{n=0}^{N} 2^{n-1} {c_n}^2 - 2^{N-1} {c_N}^2\right) + \left(1 - \sum_{n=0}^{N-1} 2^{n-1} {c_n}^2\right)\right\}$$

下からの近似関数　　　上からの近似関数

数学セミナー連載記事
2011年4月号～ 2012年4月号 (全12回)

楕円関数と友達になろう

－微分方程式の解の全体像を求めて－

四ツ谷晶二・村井実　共著

（単行本化準備中）

ありがとうございました！