記号的ニュートン法による
多項式のベキ級数根の計算方法

サイバネットシステム株式会社

記号的ニュートン法とは、数値的ニュートン法（Newton-Raphson 法）を改良して、変数を含む多項式の近似根を計算するための算法です。一般に５次以上の多項式の根は代数的（四則演算、根号）に得られないため、ベキ級数などの近似化を考える必要があります。このワークシートでは、記号的ニュートン法のサンプルコードと共にその基本的な利用法を紹介します。

コードの実装

記号的ニュートン法は、数値的ニュートン法とほとんど同一のアルゴリズムです。初期値（記号的ニュートン法ではベキ級数のための展開点）を与え、指定された次数まで多項式の根の近似を繰り返します。

このワークシートでは、Maple のコードエディタコンポーネントを用いて記号的ニュートン法のコードを記述しています。コードを実行する場合は下記のコンポーネントボタンを押して下さい。また、コードの中身を閲覧する場合は、コンポーネント上でマウス右ボタンを押し「コードエディタを展開」のメニューを選択して下さい。

記号的ニュートン法コード実装例：

```
restart;
```

基本的な使用例

コードエディタ内で定義した「SymbolicNewton」コマンドの基本的な利用方法を紹介します。
まず、変数を s とする適当な多項式を変数 p に割り当てます。

2次の多項式を定義：

$p := s^2 + 2\cdot \zeta\cdot\omega\cdot s + \omega^2$

$$p := s^2 + 2\,\zeta\,\omega\,s + \omega^2 \tag{2.1}$$

作成した多項式 p のベキ級数根を SymbolicNewton コマンドで計算します。コマンドの引数は、多項式、展開点、次数、変数です。

展開点 $s = s_0$ で 1 次の s に関するベキ級数根を計算：

$SymbolicNewton(p, s_0, 1, s)$

$$s_0 - \frac{s_0^2 + 2\,\zeta\,\omega\,s_0 + \omega^2}{2\,(s_0 + \zeta\,\omega)} \tag{2.2}$$

同様に、2 次、3 次のベキ級数根を計算：

$SymbolicNewton(p, s_0, 2, s)$

$$s_0 - \frac{s_0^2 + 2\,\zeta\,\omega\,s_0 + \omega^2}{2\,(s_0 + \zeta\,\omega)} - \frac{s_0^4 + 2\,s_0^2\,\omega^2 + \omega^4 + 4\,\zeta\,\omega\,s_0^3 + 4\,\zeta^2\,\omega^2\,s_0^2 + 4\,\zeta\,\omega^3\,s_0}{4\,(s_0^2 + 2\,\zeta\,\omega\,s_0 - \omega^2 + 2\,\zeta^2\,\omega^2)\,(s_0 + \zeta\,\omega)} \tag{2.3}$$

$SymbolicNewton(p, s_0, 3, s)$

$$s_0 - \frac{s_0^2 + 2\zeta\omega s_0 + \omega^2}{2(s_0 + \zeta\omega)} - \frac{s_0^4 + 2 s_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\zeta\omega s_0^3 + 4\zeta^2\omega^2 s_0^2 + 4\zeta\omega^3 s_0}{4(s_0^2 + 2\zeta\omega s_0 - \omega^2 + 2\zeta^2\omega^2)(s_0 + \zeta\omega)} - \Big(48 s_0^4\zeta^2\omega^4 + 4 s_0^6\omega^2 + 6 s_0^4\omega^4 + 4 s_0^2\omega^6 + s_0^8 + \omega^8 + 24 s_0^2\omega^6\zeta^2 + 24 s_0^5\zeta\omega^3 + 8\zeta\omega^7 s_0 + 24 s_0^3\omega^5\zeta + 8\zeta\omega s_0^7 + 24\zeta^2\omega^2 s_0^6 + 32\zeta^3\omega^3 s_0^5 + 16\zeta^4\omega^4 s_0^4 + 32\zeta^3\omega^5 s_0^3\Big) \Big/ \Big(8\big(s_0^4 + 4\zeta\omega s_0^3 + 12\zeta^2\omega^2 s_0^2 - 6 s_0^2\omega^2 - 12\zeta\omega^3 s_0 + 16 s_0\zeta^3\omega^3 + \omega^4 - 8\zeta^2\omega^4 + 8\zeta^4\omega^4\big)(s_0^2 + 2\zeta\omega s_0 - \omega^2 + 2\zeta^2\omega^2)(s_0 + \zeta\omega)\Big) \tag{2.4}$$

ここで計算したベキ級数根は、任意の展開点 s_0 での1次、2次、3次のベキ級数根です。見た目上の数式表現を整理したい場合は、適宜 simplify などのコマンドを適用します。

$simplify(\mathbf{(2.3)}, symbolic)$

$$-\frac{-s_0^4 + 6 s_0^2\omega^2 + 8\zeta\omega^3 s_0 - \omega^4 + 4\zeta^2\omega^4}{4(s_0^2 + 2\zeta\omega s_0 - \omega^2 + 2\zeta^2\omega^2)(s_0 + \zeta\omega)} \tag{2.5}$$

$simplify(\mathbf{(2.4)}, symbolic)$

$$-\Big(280 s_0^4\zeta^2\omega^4 + 28 s_0^6\omega^2 - 70 s_0^4\omega^4 + 28 s_0^2\omega^6 + 24\omega^8\zeta^2 - 80\zeta^4\omega^8 + 64\zeta^6\omega^8 - s_0^8 - \omega^8 - 336 s_0^2\omega^6\zeta^2 - 256\zeta^3\omega^7 s_0 + 112 s_0^5\zeta\omega^3 + 48\zeta\omega^7 s_0 - 224 s_0^3\omega^5\zeta + 448\zeta^3\omega^5 s_0^3 + 448\zeta^4\omega^6 s_0^2 + 256\zeta^5\omega^7 s_0\Big) \Big/ \Big(8\big(s_0^4 + 4\zeta\omega s_0^3 + 12\zeta^2\omega^2 s_0^2 - 6 s_0^2\omega^2 - 12\zeta\omega^3 s_0 + 16 s_0\zeta^3\omega^3 + \omega^4 - 8\zeta^2\omega^4 + 8\zeta^4\omega^4\big)(s_0^2 + 2\zeta\omega s_0 - \omega^2 + 2\zeta^2\omega^2)(s_0 + \zeta\omega)\Big) \tag{2.6}$$

さらに ω で整理する場合は、 collect コマンドを用いて次のように整理できます：

a) 1次の級数展開に対しての整理結果：

$$\frac{collect(numer(\mathbf{(2.2)}), \omega)}{collect(denom(\mathbf{(2.2)}), \omega)}$$

$$\frac{s_0^2 - \omega^2}{2 s_0 + 2\zeta\omega} \tag{2.7}$$

b) 2次の級数展開に対しての整理結果：

$$\frac{collect(numer(\mathbf{(2.5)}), \omega)}{collect(denom(\mathbf{(2.5)}), \omega)}$$

$$\frac{(1 - 4\zeta^2)\omega^4 - 8\zeta\omega^3 s_0 - 6 s_0^2\omega^2 + s_0^4}{4(-1 + 2\zeta^2)\zeta\omega^3 + (8\zeta^2 s_0 + 4(-1 + 2\zeta^2) s_0)\omega^2 + 12 s_0^2\zeta\omega + 4 s_0^3} \tag{2.8}$$

c) 3次の級数展開に対しての整理結果：

$$\frac{collect(numer(\mathbf{(2.6)}), \omega)}{collect(denom(\mathbf{(2.6)}), \omega)}$$

$$\Big(\big(-24\zeta^2 + 80\zeta^4 - 64\zeta^6 + 1\big)\omega^8 + \big(-48\zeta s_0 - 256\zeta^5 s_0 + 256\zeta^3 s_0\big)\omega^7 + \big(336 s_0^2\zeta^2 \tag{2.9}$$

$$- 28 s_0^2 - 448 \zeta^4 s_0^2) \omega^6 + (224 s_0^3 \zeta - 448 \zeta^3 s_0^3) \omega^5 + (-280 s_0^4 \zeta^2 + 70 s_0^4) \omega^4$$
$$- 112 s_0^5 \zeta \omega^3 - 28 s_0^6 \omega^2 + s_0^8) \big/ (8 (1 - 8 \zeta^2 + 8 \zeta^4) (-1 + 2 \zeta^2) \zeta \omega^7 + (8 ((($$
$$-12 \zeta s_0 + 16 \zeta^3 s_0) (-1 + 2 \zeta^2) + 2 (1 - 8 \zeta^2 + 8 \zeta^4) \zeta s_0) \zeta + 8 (1 - 8 \zeta^2$$
$$+ 8 \zeta^4) (-1 + 2 \zeta^2) s_0) \omega^6 + (8 ((12 s_0^2 \zeta^2 - 6 s_0^2) (-1 + 2 \zeta^2) + 2 (-12 \zeta s_0$$
$$+ 16 \zeta^3 s_0) \zeta s_0 + (1 - 8 \zeta^2 + 8 \zeta^4) s_0^2) \zeta + 8 ((-12 \zeta s_0 + 16 \zeta^3 s_0) (-1 + 2 \zeta^2)$$
$$+ 2 (1 - 8 \zeta^2 + 8 \zeta^4) \zeta s_0) s_0) \omega^5 + (8 (4 s_0^3 \zeta (-1 + 2 \zeta^2) + 2 (12 s_0^2 \zeta^2 - 6$$
$$s_0^2) \zeta s_0 + (-12 \zeta s_0 + 16 \zeta^3 s_0) s_0^2) \zeta + 8 ((12 s_0^2 \zeta^2 - 6 s_0^2) (-1 + 2 \zeta^2) + 2 ($$
$$-12 \zeta s_0 + 16 \zeta^3 s_0) \zeta s_0 + (1 - 8 \zeta^2 + 8 \zeta^4) s_0^2) s_0) \omega^4 + (8 (s_0^4 (-1 + 2 \zeta^2) + 8$$
$$s_0^4 \zeta^2 + (12 s_0^2 \zeta^2 - 6 s_0^2) s_0^2) \zeta + 8 (4 s_0^3 \zeta (-1 + 2 \zeta^2) + 2 (12 s_0^2 \zeta^2 - 6 s_0^2) \zeta s_0 + ($$
$$-12 \zeta s_0 + 16 \zeta^3 s_0) s_0^2) s_0) \omega^3 + (48 s_0^5 \zeta^2 + 8 (s_0^4 (-1 + 2 \zeta^2) + 8 s_0^4 \zeta^2 + (12 s_0^2 \zeta^2$$
$$- 6 s_0^2) s_0^2) s_0) \omega^2 + 56 s_0^6 \zeta \omega + 8 s_0^7)$$

なお、ω で整理した得られた結果の式をさらに整理して記述するには、LargeExpressions パッケージを用いた方法も適用できます。詳細はこちらの事例を参照してください。

ベキ級数根の精度

ベキ級数で表現された根は当然のことながら近似です。従ってその精度は厳密に計算された結果に対して誤差を含んでいます。このセクションではベキ級数根の誤差がどの程度であるかを具体的な値で確認します。

まず、次の1自由度振動系の伝達関数を考えます。ここでは、DynamicSystems パッケージを読み込み、1自由度振動系の微分方程式から伝達関数に関するシステムオブジェクト（TransferFunction コマンド）を構築します。

```
with(DynamicSystems) :
sys := TransferFunction(m·diff(x(t), t$2) + b·diff(x(t), t) + k·x(t) = u(t), [u(t)], [x(t)])
```

$$sys := \left[\begin{array}{c} \textbf{Transfer Function} \\ \text{continuous} \\ \text{1 output(s); 1 input(s)} \\ \text{inputvariable} = [u(s)] \\ \text{outputvariable} = [x(s)] \end{array}\right. \tag{3.1}$$

作成したシステムオブジェクトから伝達関数を取り出します。

```
TF := sys:-tf[1, 1]
```

$$TF := \frac{1}{m s^2 + b s + k} \tag{3.2}$$

この極は、分母部分の多項式の根で計算されるので、厳密には solve コマンドにより次を得ることができます；

```
TFdenom := denom(TF)
```

$$TFdenom := m\,s^2 + b\,s + k \tag{3.3}$$

$solve(TFdenom, s)$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,m\,k}}{2\,m}, -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,m\,k}}{2\,m} \tag{3.4}$$

なお、多項式の根を厳密に（数式的に）表現できるのは、多項式の次数が5次未満の場合に限ります。5次以上の場合、Maple の solve コマンドは RootOf というコマンドを用いて根を表現します。

さて、SymbolicNewton コマンドを用いて、極のベキ級数根による表現を計算してみます。ここでは、展開点を $s=0$ として、2次、3次、4次のベキ級数根を計算します。

$soldeg2 := SymbolicNewton(TFdenom, 0, 2, s)$

$$soldeg2 := -\frac{k}{b} - \frac{m\,k^2}{b\,(-2\,m\,k + b^2)} \tag{3.5}$$

$soldeg3 := SymbolicNewton(TFdenom, 0, 3, s)$

$$soldeg3 := -\frac{k}{b} - \frac{m\,k^2}{b\,(-2\,m\,k + b^2)} - \frac{k^4\,m^3}{b\,(2\,m^2\,k^2 - 4\,m\,k\,b^2 + b^4)\,(-2\,m\,k + b^2)} \tag{3.6}$$

$soldeg4 := SymbolicNewton(TFdenom, 0, 4, s)$

$$soldeg4 := -\frac{k}{b} - \frac{m\,k^2}{b\,(-2\,m\,k + b^2)} - \frac{k^4\,m^3}{b\,(2\,m^2\,k^2 - 4\,m\,k\,b^2 + b^4)\,(-2\,m\,k + b^2)} \tag{3.7}$$

$-4\,m\,k\,b^2 + b^4)\,(-2\,m\,k + b^2))$

ここで計算したベキ級数根の精度を確認するために、m, b, k の各パラメータに具体的な値を代入した際の値（すなわち、極の値）を計算し比較してみます。

まず、厳密な極の表現である **(3.4)** を用いた場合の値です。

$params := [m = 1.2, b = 4.1, k = 2.8]$

$$params := [m = 1.2, b = 4.1, k = 2.8] \tag{3.8}$$

$eval(\mathbf{(3.4)}[1], params)$

$$-0.9434350105 \tag{3.9}$$

次に、2次、3次、4次のベキ級数根に params の値を代入し比較してみます。

$eval([soldeg2, soldeg3, soldeg4], params)$

$$[-0.9103434939, -0.9427488810, -0.9434347029] \tag{3.10}$$

正確な値との誤差は次の結果になります；

$map(p \rightarrow \mathrm{abs}(\mathbf{(3.9)} - p), \mathbf{(3.10)})$

$$[0.0330915166, 0.0006861295, 3.076\ 10^{-7}] \tag{3.11}$$

ベキ級数の次数を高めることで計算される極の精度も向上することがわかります。

ベキ級数根は、あくまで厳密な根に対する近似ですが、展開点の選択及び次数を上げることで元の根と収束半径の範囲で一致することは数学的に証明されています。