非線形連立方程式の解法
〜Maple での近似解法と厳密解法〜

Maple では、高精度での数値計算を行う機能が豊富に用意されています。このワークシートでは、最も基本的な数値計算法である、非線形連立方程式の解法のコマンド群とその使用方法を紹介します。また、Maple の特徴である厳密な計算方法についても紹介しています。

> $restart$

問題設定

このワークシートでは変数 x, y, s, t からなる４個の非線形連立方程式を用意し、その根の計算を行うことにします。まず、問題を定義するため、次の x, y, s, t からなる行列 X を定義します。

> $X := Matrix(2, 2, [x, y, s, t])$

$$X := \begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

定義した行列 X の３乗を V として定義し、非線形方程式を作成します。

> $V := X^3$

$$V := \begin{bmatrix} (x^2+ys)\,x+(xy+yt)\,s & (x^2+ys)\,y+(xy+yt)\,t \\ (sx+ts)\,x+(ys+t^2)\,s & (sx+ts)\,y+(ys+t^2)\,t \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

方程式の右辺部分は次の行列 W で定義します。

> $W := Matrix([[1, 2], [3, 4]])$

$$W := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

つまり、このワークシートで解く問題は次となります；

> $V = W$

$$\begin{bmatrix} (x^2+ys)\,x+(xy+yt)\,s & (x^2+ys)\,y+(xy+yt)\,t \\ (sx+ts)\,x+(ys+t^2)\,s & (sx+ts)\,y+(ys+t^2)\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Maple では、行列のままでは連立方程式を解けません。解きたい連立方程式は、リストまたは集合で用意する必要があるので、zip コマンドと convert コマンドを用いて連立方程式の集合へ変換します。

> $zip((a, b) \to a = b, V, W)$

$$\begin{bmatrix} (x^2+ys)\,x+(xy+yt)\,s=1 & (x^2+ys)\,y+(xy+yt)\,t=2 \\ (sx+ts)\,x+(ys+t^2)\,s=3 & (sx+ts)\,y+(ys+t^2)\,t=4 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

> $convert(\mathbf{(1.5)}, set)$

$$\{(x^2+ys)\,x+(xy+yt)\,s=1,\ (x^2+ys)\,y+(xy+yt)\,t=2,\ (sx+ts)\,x+(ys+t^2)\,s=3,\ (sx+ts)\,y+(ys+t^2)\,t=4\} \tag{1.6}$$

次章以降のセクションでこの非線形連立方程式 **(1.6)** の根を計算してみます。

近似解法

まず、通常の近似解法で根を求めてみます。最も簡単な方法は fsolve コマンドです。

fsolve コマンドに方程式のリストまたは集合と解くべき変数名（のリストまたは集合）を指定します。

> $fsolve((\mathbf{1.6}), \{x, y, s, t\})$

$$\{s = 1.290323571, t = 1.161174665, x = -0.1291489064, y = 0.8602157140\} \quad \textbf{(2.1)}$$

fsolve コマンドは、特に指定しない限りデフォルトでは実根のみを求めます。複素根を計算するときは complex オプションを指定します。

> $fsolve((\mathbf{1.6}), \{x, y, s, t\}, complex)$

$$\{s = -0.08163751324 - 0.7921021013\,\mathrm{I}, t = -0.8383586103 - 1.154431075\,\mathrm{I}, x = -0.7567210971 - 0.3623289732\,\mathrm{I}, y = -0.05442500883 - 0.5280680675\,\mathrm{I}\} \quad \textbf{(2.2)}$$

Maple の fsolve コマンドでは、計算精度を変更することも可能です。精度の変更は Maple の環境変数 Digits を変更します。次のコマンドは非線形連立方程式の根を 32 桁精度で計算します。

> $Digits := 32$

$$Digits := 32 \quad \textbf{(2.3)}$$

> $fsolve((\mathbf{1.6}), \{x, y, s, t\})$

$$\{s = 1.2903235709677735457715693366457, t = 1.1611746646034246972982372888631, x = -0.12914890636434884847333204778258, y = 0.86021571397851569718104622443047\} \quad \textbf{(2.4)}$$

Digits 環境変数を大きい値に設定し根の計算をすることで、悪条件の問題などにも適用することが可能です。(ここでは一旦 Digits 変数値を元に戻します)

> $Digits := 10:$

fsolve コマンドが内部的にどのようにして根の計算を行っているかを確認するには、infolevel コマンドにより fsolve のメッセージ出力レベルを変更します。

> $infolevel[\text{`}fsolve\text{`}] := 3:$

再度、根の計算を行ってみます。

> $fsolve((\mathbf{1.6}), \{x, y, s, t\})$

```
fsolve/sysnewton: trying multivariate Newton iteration
fsolve/sysnewton:
guess vector [-.63671914168254287, -7.6797352852702296,
-6.9277048029680136, 4.8200140379023363]
fsolve/sysnewton: norm of errors: 1514.2115836705250
fsolve/sysnewton: new norm: 450.23338986521816
fsolve/sysnewton: iter = 1 |incr| = 6.7066 new values s = -.40922 t =
-5.0900 x = -4.6032 y = 3.2551
fsolve/sysnewton: new norm: 135.03558761542201
fsolve/sysnewton: iter = 2 |incr| = 4.4942 new values s = -.23798 t =
-3.3249 x = -3.0336 y = 2.2668
fsolve/sysnewton: new norm: 41.844999968564592
fsolve/sysnewton: iter = 3 |incr| = 3.0479 new values s = -0.76254e-1 t
= -2.0514 x = -1.9355 y = 1.7522
fsolve/sysnewton: new norm: 15.117469296454005
fsolve/sysnewton: iter = 4 |incr| = 2.5715 new values s = .17593 t =
-.87675 x = -1.0119 y = 1.9733
fsolve/sysnewton: new norm: 24751.430975197462
fsolve/sysnewton: new norm: 2948.0174370872128
fsolve/sysnewton: new norm: 82.257155856962371
fsolve/sysnewton: new norm: 14.693569184250596
fsolve/sysnewton: iter = 5 |incr| = 2.3264 new values s = .32796 t =
-.36118 x = -.62265 y = 3.2429
fsolve/sysnewton: new norm: 1234.7850616420074
fsolve/sysnewton: new norm: 192.92666702866210
fsolve/sysnewton: new norm: 12.407126151591299
fsolve/sysnewton: iter = 6 |incr| = 2.5887 new values s = .67020 t =
.51055 x = -0.79878e-1 y = 4.0748
```

```
fsolve/sysnewton: new norm: 4.1533941911845558
fsolve/sysnewton: iter = 7 |incr| = 3.9653 new values s = 1.0625 t =
.84764 x = -.20912 y = .96811
fsolve/sysnewton: new norm: .849105142124687680
fsolve/sysnewton: iter = 8 |incr| = .91779 new values s = 1.3819 t =
1.2289 x = -.15557 y = .80452
fsolve/sysnewton: new norm: 0.27349309408751940e-1
fsolve/sysnewton: iter = 9 |incr| = .22997 new values s = 1.2942 t =
1.1629 x = -.13145 y = .85671
fsolve/sysnewton: new norm: 0.5169966644271363e-4
fsolve/sysnewton: iter = 10 |incr| = 0.11401e-1 new values s = 1.2903 t
= 1.1612 x = -.12915 y = .86021
fsolve/sysnewton: new norm: 0.8390222029e-10
fsolve/sysnewton: iter = 11 |incr| = 0.74491e-5 new values s = 1.2903 t
= 1.1612 x = -.12915 y = .86022
fsolve/sysnewton: new norm: 0.26281e-15
fsolve/sysnewton: iter = 12 |incr| = 0.23369e-10 new values s = 1.2903 t
= 1.1612 x = -.12915 y = .86022
```

$$\{s = 1.290323571, t = 1.161174665, x = -0.1291489064, y = 0.8602157140\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

fsolve コマンドでは、ニュートン・ラフソン法に基づいた根の計算を行っています。

一方、多変数の非線形方程式の根をすべて求めるときには、RootFinding パッケージの Homotopy コマンドが便利です。このコマンドは文字通りホモトピー法アルゴリズムを使用して、すべての根を同時に計算します。

まず、RootFinding パッケージを読み込みます。

> $with(RootFinding)$

$$[Analytic, AnalyticZerosFound, BivariatePolynomial, Homotopy, Isolate, NextZero, Parametric] \qquad \textbf{(2.6)}$$

ホモトピー法を用いてすべての根を計算します。なお、元の方程式系を等式ではなく多項式の集合に変更する必要があるため、左辺−右辺の形の式変形を方程式の集合データに適用してからホモトピー法を用います。

> $Homotopy(map(p \rightarrow lhs(p) - rhs(p), \textbf{(1.6)}))$

$$\begin{aligned}
&[[s = -0.08163751324 - 0.7921021013\,I, t = -0.8383586103 - 1.154431075\,I, x = -0.7567210971 - 0.3623289732\,I, y = -0.05442500883 - 0.5280680675\,I], \\
&[s = 1.290323576 - 0.\,I, t = 1.161174662 - 0.\,I, x = -0.1291489135 - 0.\,I, y = 0.8602157172 - 0.\,I], \\
&[s = 0.7267992987 - 0.3253508903\,I, t = 1.418945943 + 0.1488243167\,I, x = 0.6921466439 + 0.4741752070\,I, y = 0.4845328658 - 0.2169005935\,I], \\
&[s = 0.7267992987 + 0.3253508903\,I, t = 1.418945943 - 0.1488243167\,I, x = 0.6921466439 - 0.4741752070\,I, y = 0.4845328658 + 0.2169005935\,I], \\
&[s = -0.08163751323 + 0.7921021013\,I, t = -0.8383586103 + 1.154431075\,I, x = -0.7567210971 + 0.3623289732\,I, y = -0.05442500882 + 0.5280680675\,I], \\
&[s = -0.6451617825 + 1.117452999\,I, t = -0.5805873337 + 1.005606754\,I, x = 0.06457444872 - 0.1118462446\,I, y = -0.4301078549 + 0.7449686660\,I], \\
&[s = -0.6451617855 - 0.4667512110\,I, t = -0.5805873323 - 1.303255391\,I, x = 0.06457445319 - 0.8365041803\,I, y = -0.4301078570 - 0.3111674740\,I], \\
&[s = -0.6451617934 - 1.117452993\,I, t = -0.5805873287 - 1.005606757\,I, x = 0.06457446477 + 0.1118462353\,I, y = -0.4301078623 - 0.7449686617\,I], \\
&[s = -0.6451617855 + 0.4667512110\,I, t = -0.5805873323 + 1.303255391\,I, x = 0.06457445318 + 0.8365041803\,I, y = -0.4301078570 + 0.3111674740\,I]]
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.7)}$$

求まった根が正しいかを検証するために、元の連立方程式 **(1.6)** に代入し確認します。

> $seq(eval(map(p \rightarrow lhs(p) - rhs(p), \textbf{(1.6)}), solList), solList = \textbf{(2.7)})$

$$\{-1.\,10^{-10} + 2.\,10^{-10}\,I, 5.5\,10^{-10}\,I, 1.\,10^{-9} + 1.4\,10^{-9}\,I, 2.\,10^{-9} + 1.6\,10^{-9}\,I\}, \qquad \textbf{(2.8)}$$

$\{-1.1\ 10^{-8} - 0.\ I, -6.\ 10^{-9} - 0.\ I, 4.\ 10^{-9} - 0.\ I, 7.\ 10^{-9} - 0.\ I\}, \{4.\ 10^{-10} - 2.\ 10^{-10}\ I, 1.\ 10^{-9} - 7.\ 10^{-10}\ I, 1.\ 10^{-9} - 1.2\ 10^{-10}\ I, 2.\ 10^{-9} + 1.\ 10^{-10}\ I\}, \{4.\ 10^{-10} + 2.\ 10^{-10}\ I, 1.\ 10^{-9} + 1.2\ 10^{-10}\ I, 1.\ 10^{-9} + 7.\ 10^{-10}\ I, 2.\ 10^{-9} - 1.\ 10^{-10}\ I\}, \{-1.\ 10^{-10} - 2.\ 10^{-10}\ I, -5.6\ 10^{-10}\ I, 1.\ 10^{-9} - 1.4\ 10^{-9}\ I, 2.\ 10^{-9} - 1.7\ 10^{-9}\ I\}, \{-1.1\ 10^{-8} + 1.450074436\ 10^{-8}\ I, -6.\ 10^{-9} + 5.879937748\ 10^{-9}\ I, 4.\ 10^{-9} - 6.385020057\ 10^{-9}\ I, 7.\ 10^{-9} - 8.83421350\ 10^{-9}\ I\}, \{-2.\ 10^{-9} - 1.0\ 10^{-9}\ I, -1.\ 10^{-9} - 5.\ 10^{-10}\ I, -1.\ 10^{-9} - 1.5\ 10^{-10}\ I, 0.\ I\}, \{-1.1\ 10^{-8} + 1.437413760\ 10^{-8}\ I, -4.\ 10^{-9} + 3.126922316\ 10^{-9}\ I, 4.\ 10^{-9} - 6.787948364\ 10^{-9}\ I, 9.\ 10^{-9} - 1.049661367\ 10^{-8}\ I\}, \{-2.\ 10^{-9} + 1.0\ 10^{-9}\ I, -1.\ 10^{-9} + 2.8\ 10^{-10}\ I, -1.\ 10^{-9} + 5.\ 10^{-10}\ I, -1.\ 10^{-10} + 1.\ 10^{-10}\ I\}$

すべて非常に小さい残差となっています。上記の結果に simplify コマンドを適用することで 10^{-9} 以下の誤差は零として解釈するようにしてみます。

> *map*(*v*→*simplify*(*v*, *zero*), {**(2.8)**})

$$\{\{-1.100000000\ 10^{-8}, -6.000000000\ 10^{-9}, 4.000000000\ 10^{-9}, 7.000000000\ 10^{-9}\}, \{0., -2.000000000\ 10^{-9} - 1.000000000\ 10^{-9}\ I, -1.000000000\ 10^{-9} - 5.000000000\ 10^{-10}\ I, -1.000000000\ 10^{-9} - 1.500000000\ 10^{-10}\ I\}, \{-5.600000000\ 10^{-10}\ I, -1.000000000\ 10^{-10} - 2.000000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} - 1.400000000\ 10^{-9}\ I, 2.000000000\ 10^{-9} - 1.700000000\ 10^{-9}\ I\}, \{5.500000000\ 10^{-10}\ I, -1.000000000\ 10^{-10} + 2.000000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} + 1.400000000\ 10^{-9}\ I, 2.000000000\ 10^{-9} + 1.600000000\ 10^{-9}\ I\}, \{-1.100000000\ 10^{-8} + 1.437413760\ 10^{-8}\ I, -4.000000000\ 10^{-9} + 3.126922316\ 10^{-9}\ I, 4.000000000\ 10^{-9} - 6.787948364\ 10^{-9}\ I, 9.000000000\ 10^{-9} - 1.049661367\ 10^{-8}\ I\}, \{-1.100000000\ 10^{-8} + 1.450074436\ 10^{-8}\ I, -6.000000000\ 10^{-9} + 5.879937748\ 10^{-9}\ I, 4.000000000\ 10^{-9} - 6.385020057\ 10^{-9}\ I, 7.000000000\ 10^{-9} - 8.834213500\ 10^{-9}\ I\}, \{-2.000000000\ 10^{-9} + 1.000000000\ 10^{-9}\ I, -1.000000000\ 10^{-9} + 2.800000000\ 10^{-10}\ I, -1.000000000\ 10^{-9} + 5.000000000\ 10^{-10}\ I, -1.000000000\ 10^{-10} + 1.000000000\ 10^{-10}\ I\}, \{4.000000000\ 10^{-10} - 2.000000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} - 7.000000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} - 1.200000000\ 10^{-10}\ I, 2.000000000\ 10^{-9} + 1.000000000\ 10^{-10}\ I\}, \{4.000000000\ 10^{-10} + 2.000000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} + 1.200000000\ 10^{-10}\ I, 1.000000000\ 10^{-9} + 7.000000000\ 10^{-10}\ I, 2.000000000\ 10^{-9} - 1.000000000\ 10^{-10}\ I\}\} \tag{2.9}$$

厳密解法

前章までは近似的な算法を用いました。一方、制御や通信などの各種工学分野では、可能な限り厳密な根の値を求める必要がある場合も考えられます。すべての非線形連立方程式で厳密な根の計算は可能ではありませんが、ある種の連立方程式については厳密な根の計算が可能です。

注）非線形連立方程式の根がある値として存在するか否かは、多項式からなるイデアルが０次元（＝値の集合）か否か、という問題となります。イデアルまたはその次元

については、代数学の参考書籍を参照ください。

さて、このワークシートでは、グレブナ基底算法を用いて式**(1.6)**の根を厳密に求めてみます。まず、グレブナ基底パッケージを読み込みます。

注）グレブナ基底に関する詳細については、例えば、D.Cox, J.Little, D.O'shea 著「グレブナ基底１・２」や「グレブナ基底と代数多様体入門 上・下」などの書籍を参照ください。

> $with(Groebner)$

$$[Basis, FGLM, HilbertDimension, HilbertPolynomial, HilbertSeries, Homogenize, InitialForm, InterReduce, IsProper, IsZeroDimensional, LeadingCoefficient, LeadingMonomial, LeadingTerm, MatrixOrder, MaximalIndependentSet, MonomialOrder, MultiplicationMatrix, MultivariateCyclicVector, NormalForm, NormalSet, RationalUnivariateRepresentation, Reduce, RememberBasis, SPolynomial, Solve, SuggestVariableOrder, TestOrder, ToricIdealBasis, TrailingTerm, UnivariatePolynomial, Walk, WeightedDegree] \quad (3.1)$$

グレブナ基底パッケージでは、連立方程式を等式ではなく多項式の集合またはリストとして扱う必要がありますので、各要素（方程式）の左辺ー右辺の形に書き換えます。

> $poly := map(p \to lhs(p) - rhs(p), \mathbf{(1.6)})$

$$poly := \{(x^2 + y\,s)\,x + (x\,y + y\,t)\,s - 1, (x^2 + y\,s)\,y + (x\,y + y\,t)\,t - 2, (s\,x + t\,s)\,x + (y\,s + t^2)\,s - 3, (s\,x + t\,s)\,y + (y\,s + t^2)\,t - 4\} \quad (3.2)$$

この多項式の集合の根が値として存在するか否かを確認するには、次のIsZeroDimentional コマンドを用います。このコマンドが true を返す場合、多項式系はその根を値として持つことを意味します。

> $IsZeroDimensional(poly)$

$$true \quad (3.3)$$

次にグレブナ基底パッケージ内の Solve コマンドを多項式の集合 poly に適用します。Solve コマンドは、多項式系を直接解くわけではなく、多項式を解くための前処理を施すためのコマンドです。Solve コマンドの戻り値は gbdata という変数に割り当てておきます。

> $gbdata := Solve(poly, \{x, y, s, t\})$

$$gbdata := \{[[1331\,t^9 - 9438\,t^6 + 22740\,t^3 - 17576, 15278\,t - 11011\,t^4 + 1331\,t^7 + 11700\,x, -26978\,t + 11011\,t^4 - 1331\,t^7 + 11700\,s, -26978\,t + 11011\,t^4 - 1331\,t^7 + 17550\,y], plex(y, s, x, t), \{t, t^3 - 4, -49 - 22\,t^3 + 8\,t^6\}]\} \quad (3.4)$$

gbdata は、{簡約されたグレブナ基底, グレブナ基底の計算に用いられた変数順序, 非零の条件} という結果を返します。ここで重要なのは、一番最初の要素である「簡約されたグレブナ基底」です。

簡約されたグレブナ基底には、可能な限り各々の変数（今回の多項式系では x, y, s, t の変数集合）に関して次数を低下させた多項式が用意されています。つまり、グレブナ基底とは、ある変数順序のもとで変数の次数を可能な限り低減させる算法と言えます。（場合によっては変数の次数が零、すなわち変数を消去することも起こりえます。）

計算されたグレブナ基底部分を取り出して、gblist という変数に割り当てます。

> $gblist := gbdata[1, 1]$

$$gblist := [1331\,t^9 - 9438\,t^6 + 22740\,t^3 - 17576, 15278\,t - 11011\,t^4 + 1331\,t^7 + 11700\,x, -26978\,t + 11011\,t^4 - 1331\,t^7 + 11700\,s, -26978\,t + 11011\,t^4 - 1331\,t^7 + 17550\,y] \quad (3.5)$$

gblist の１番目の要素の多項式を見ると、変数は t しか含んでいません。そこで solve コマンドを用いて gblist の１番目の要素の多項式の根を計算してみます。（解いた根は tsol という変数に割り当てます）

> $tsol := solve(gblist[1], \{t\}):$

tsol の１番目の結果を確認してみます；

> $tsol[1]$

$$\left\{t = \frac{1}{22}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right\} \tag{3.6}$$

根を厳密に計算できています。同様に他の根についても確認してみます。

> $tsol[2]$

$$\left\{t = -\frac{1}{44}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3} + \frac{1}{44}\left(\mathrm{I}\sqrt{3}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right)\right\} \tag{3.7}$$

> $tsol[3]$

$$\left\{t = -\frac{1}{44}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3} - \frac{1}{44}\left(\mathrm{I}\sqrt{3}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right)\right\} \tag{3.8}$$

> $tsol[4]$

$$\left\{t = \frac{1}{22}\left(25168 + 264\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} + 429\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} - 264\,\mathrm{I}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3}\sqrt{3} + 429\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} - 75\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33} - 75\,\mathrm{I}\sqrt{33}\sqrt{3}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\right)^{1/3}\right\} \tag{3.9}$$

> $tsol[5]$

$$\left\{t = -\frac{1}{44}\left(25168 + 264\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} + 429\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} - 264\,\mathrm{I}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3}\sqrt{3} + 429\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} - 75\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33} - 75\,\mathrm{I}\sqrt{33}\sqrt{3}\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\right)^{1/3} - \frac{1}{44}\left(\mathrm{I}\sqrt{3}\left(25168 + 264\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} + 429\left(3146\right.\right.\right. \tag{3.10}$$

$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}-264\,\mathrm{I}\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}\sqrt{3}+429\,\mathrm{I}\sqrt{3}\,\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}-75\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}-75\,\mathrm{I}\sqrt{33}\sqrt{3}\,\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}\Big)^{1/3}\Big)\Big\}$$

このようにして、gblist の１番目の多項式の t に関する根を合計９個計算できています。（gblist[1] は t に関して９次であるため）

t に関する根を計算できたので、この結果を gblist の２番目の多項式に代入します。なぜなら gblist の２番目の多項式は、変数 t, x からなっているためです。

> $gblist[2]$

$$15278\,t-11011\,t^4+1331\,t^7+11700\,x \tag{3.11}$$

seq コマンドおよび eval コマンドを使って、求めた tsol の各値を gblist の２番目の多項式に代入し、変数 x に関する方程式の式列を用意します。

> $xeqs := seq(eval(gblist[2], tlist), tlist = tsol):$

例えば $xeqs$ の１番目には、変数 x を含む次の多項式が割り当てられています；

> $xeqs[1]$

$$\frac{1}{11}\Big(7639\Big(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3} \tag{3.12}$$
$$+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\Big)^{1/3}\Big)-\frac{1}{1936}\Big(91\Big(25168$$
$$-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}\sqrt{33}\Big)^{4/3}\Big)+\frac{1}{1874048}\Big(25168-528\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/}$$
$$^{3}\sqrt{33}\Big)^{7/3}+11700\,x$$

従って、この方程式を x に関して解けば、x に関する根も求められます。この処理をすべての tsol の結果に対して順次行います。

> $xsol := seq(solve(eq, \{x\}), eq = [xeqs]):$

求められた $xsol$ の１番目の根を表示してみます。

> $xsol[1]$

$$\Big\{x=-\frac{1}{128700}\Big(7639\Big(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\Big(3146 \tag{3.13}$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\Big)^{1/3}\Big)$$
$$+\frac{1}{1742400}\Big(7\Big(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\Big)^{4/3}\Big)$$
$$-\frac{1}{21926361600}\Big(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\Big(3146$$
$$+550\sqrt{33}\Big)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\Big)^{7/3}\Big\}$$

確かに x に関する厳密な根が求められました。同様にして、次に gblist の３番目の多項

式にも *tsol* による結果を代入してみます。

> $gblist[3]$

$$-26978\,t+11011\,t^4-1331\,t^7+11700\,s \tag{3.14}$$

上記多項式は、変数 t, s からなります。そこで *tsol* の値を代入します。

> $seqs := seq(eval(gblist[3], tlist), tlist = tsol):$

代入した s の多項式の根を計算してみます。

> $ssol := seq(solve(eq, \{s\}), eq = [seqs]):$

求められた *ssol* の１番目の根を表示してみます。

> $ssol[1]$

$$\left\{s=\frac{1}{128700}\left(13489\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{1742400}\left(7\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{4/3}\right)+\frac{1}{21926361600}\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{7/3}\right\} \tag{3.15}$$

再び同様に、gblist の４番目の多項式についても tsol の根を用いて y の根の計算を行います。

> $gblist[4]$

$$-26978\,t+11011\,t^4-1331\,t^7+17550\,y \tag{3.16}$$

> $yeqs := seq(eval(gblist[4], tlist), tlist = tsol):$

> $ysol := seq(solve(eq, \{y\}), eq = [yeqs]):$

> $ysol[1]$

$$\left\{y=\frac{1}{193050}\left(13489\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{2613600}\left(7\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{4/3}\right)+\frac{1}{32889542400}\left(25168-528\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{1/3}-858\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}+150\left(3146+550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{7/3}\right\} \tag{3.17}$$

以上により、t, x, s, y のすべての根の厳密な値が計算できました。例えば１番目の根は次のようになります；

> $map(print, [tsol[1][\,], xsol[1][\,], ssol[1][\,], ysol[1][\,]])$

$$t = \frac{1}{22}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}$$

$$x = -\frac{1}{128700}\left(7639\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right) + \frac{1}{1742400}\left(7\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{4/3}\right) - \frac{1}{21926361600}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{7/3}$$

$$s = \frac{1}{128700}\left(13489\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right) - \frac{1}{1742400}\left(7\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{4/3}\right) + \frac{1}{21926361600}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{7/3}$$

$$y = \frac{1}{193050}\left(13489\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{1/3}\right) - \frac{1}{2613600}\left(7\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{4/3}\right) + \frac{1}{32889542400}\left(25168 - 528\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{1/3} - 858\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3} + 150\left(3146 + 550\sqrt{33}\right)^{2/3}\sqrt{33}\right)^{7/3}$$

$$[\,] \qquad \textbf{(3.18)}$$

計算された厳密な根が正しいか否かは、元の方程式に代入し確認してみます。

> **for** k **to** 9 **do** $simplify(eval(poly, [tsol[k][\,], xsol[k][\,], ssol[k][\,], ysol[k][\,]]))$ **od**

$\{0\}$

$\{0\}$

$\{0\}$

$\{0\}$

$\{0\}$

$$\{0\}$$
$$\{0\}$$
$$\{0\}$$
$$\{0\} \tag{3.19}$$

すべて０となることから、求められた厳密な根が非線形連立方程式を満たしていることがわかります。

このように、グレブナ基底という算法を用いることで、（一部の）非線形な連立方程式でも根の表現を計算することが可能です。