

車両の最大登坂角

本ワークシートの内容

- 車両の最大登坂角を求める式を導出します。

キーワード

- 式の操作（式の変換、式への代入、式のまとめ方など）

対象

自動車工学、数学一般、工学一般

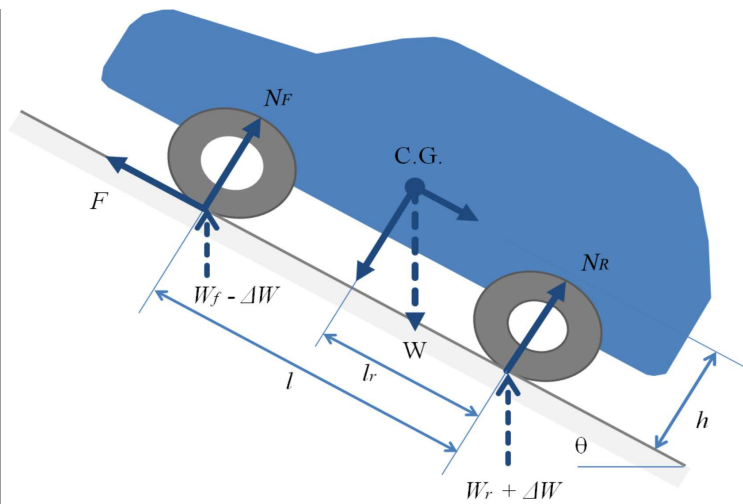
▼ はじめに

本ワークシートは、竹原伸 著 森北出版株式会社『はじめての自動車運動学 力学の基礎から学ぶクルマの動き』(<https://www.morikita.co.jp/books/mid/067101>)の第7章 7.1「加速と登坂の運動」(p85-89)を元に作成されています。

▼ 最大登坂角

ここでは、パワートレインの出力が十分大きい車両が、傾斜面を登坂できる最大登坂角を考えます。

車両の最大登坂角を前輪駆動車、後輪駆動車、四輪駆動車それぞれについて考えます。パワートレインの出力は十分大きいと仮定します。



W 車両重量

W_f 前輪荷重

W_r 後輪荷重

ΔW 荷重移動

F 前輪の駆動力

N_F 前輪抗力

N_R 後輪抗力

l ホイールベース

l_r 重心～後輪中心距離

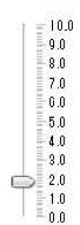
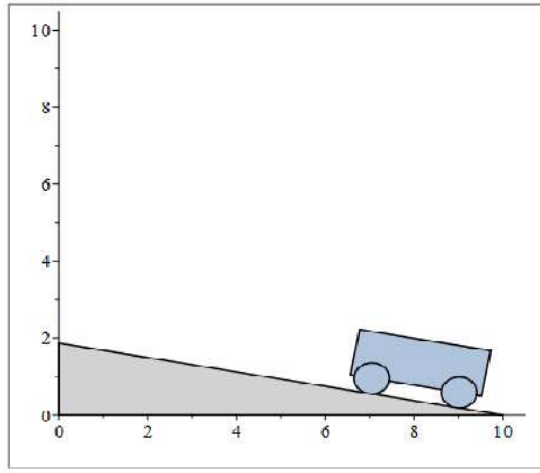
h 重心高さ

θ 最大登坂角

(前輪または後輪がフリーに回転して車両が登ることのできる角度)

▼ アプリケーション

このアプリケーションは、任意のパラメータ値を持つ車両が、任意の角度の坂を上ることができるかを可視化するアプリケーションです。駆動方式を "Front-wheel-drive" (前輪駆動車)、"Rear-wheel-drive" (後輪駆動車)、"Four-wheel-drive" (四輪駆動車) から選択し、パラメータ値を設定します。上の図を坂の高さのスライダを動かすことで、坂の角度を変えることができます。[Roll] ボタンをクリックすると、ボールが前進、または後進します。

駆動方式の選択 <input type="button" value="Front-wheel-"/>	坂の傾斜角度: <input type="text" value="10.8degrees"/> 車両の最大登坂角: <input type="text" value="12.0degrees"/>
判定: <input type="button" value="OK"/>	車両の進行方向: <input type="text" value="Forward"/>
坂の高さ 	
パラメータの設定: 摩擦係数 μ <input type="text" value="0.5"/> 重心 前輪の中心距離 l_f <input type="text" value="1"/> 重心-後輪の中心距離 l_r <input type="text" value="1"/> 重心高さ h <input type="text" value="0.5"/>	

> restart

▼ 前後輪の抗力

まず始めに、各駆動方式の最大登坂角を求めるにあたり、力のモーメントを考慮した前後輪の抗力を求めます。

車両は駆動力 F が以下の条件の時に登坂することができます。

$$W \sin(\theta) \leq F \quad (\text{傾斜面に沿った方向を正とする})$$

• 抗力

斜面と垂直方向に作用する前後輪の抗力をそれぞれ N_F, N_R とすると、以下のようになります。

$$\text{前輪の抗力:} \quad N_F := (W_f - \Delta W) \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{後輪の抗力:} \quad N_R := (W_r + \Delta W) \cdot \cos(\theta)$$

• 力のモーメント

次に前後輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式を考えます。

前輪接地点を中心とした場合を N_R 、後輪接地点を中心とした場合を N_F という変数に割り当てます。

前輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式:

$$> NR := N_R l = W (l_f \cos(\theta) + (h \sin(\theta)))$$

$$NR := N_R l = W (l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta)) \quad (1)$$

後輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合い式:

$$> NF := N_F \cdot l = W \cdot (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))$$

$$NF := N_F l = W (l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta)) \quad (2)$$

• 力のモーメントを考慮した前後輪の抗力

力のモーメントを考慮した前後輪の抗力は、それぞれ以下のとおりとなります。

前輪抗力:

$$> NF1 := isolate(NF, N_F)$$

$$NFI := N_F = \frac{W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (3)$$

後輪抗力：

> $NRI := isolate(NR, N_R)$

$$NRI := N_R = \frac{W(l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (4)$$

▼ 前輪駆動車の最大登坂角

前輪駆動車が登坂できる最大角 θ は、以下となります。

$$\tan(\theta) \leq \frac{\mu l_r}{h \mu + l}$$

• 式の定義

パワートレインの出力が十分大きい場合において、前輪駆動車の駆動力 F は、抗力 N_F とタイヤと路面の摩擦係数 μ を用いて次式で示されます。

前輪駆動車は、駆動力 F が以下の条件の時、登坂できます。

> $F := \mu \cdot N_F \geq W \cdot \sin(\theta)$

$$F := W \sin(\theta) \leq \mu N_F \quad (5)$$

力のモーメントを考慮した前輪の抗力：

> NFI

$$N_F = \frac{W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (6)$$

eval コマンドを使って、登坂の条件式に前輪の抗力を代入します。

> $eval(F, NFI)$

$$W \sin(\theta) \leq \frac{\mu W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (7)$$

Maple では、不等式などの範囲に対して、割り算を施すことはできません。よって、式の操作のために不等式を一旦、等式に変換します。

> $convert(7, equality)$

$$W \sin(\theta) = \frac{\mu W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (8)$$

式を $\sin(\theta)$ について解きます。

> $solve(8, \{\sin(\theta)\})[1]$

$$\sin(\theta) = \frac{\mu l_r \cos(\theta)}{h \mu + l} \quad (9)$$

両辺を $\cos(\theta)$ で割ります。

> $\frac{(9)}{\cos(\theta)}$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (10)$$

左辺を $\tan(\theta)$ に変換します。

> $convert(10, tan)$

$$\tan(\theta) = \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (11)$$

得た式を不等式に戻します。

> $lhs(11) \leq rhs(11)$

$$\tan(\theta) \leq \frac{\mu l_r}{h \mu + l} \quad (12)$$

▼ 後輪駆動車の最大登坂角

後輪駆動車は、駆動力 F が以下の条件の時、登坂できます。

> $F := W \sin(\theta) \leq \mu N_R$

$$F := W \sin(\theta) \leq \mu N_R \quad (13)$$

力のモーメントを考慮した前輪の抗力：

> NRI

$$N_R = \frac{W(l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (14)$$

最大登坂角の式の導出方法は、前輪駆動車の場合と同じです。

> $eqA := \text{convert}(\text{eval}(F, NRI), \text{equality})$

$$eqA := W \sin(\theta) = \frac{\mu W(l_f \cos(\theta) + h \sin(\theta))}{l} \quad (15)$$

> $eqB := \text{convert}\left(\frac{\text{solve}(eqA, \{\sin(\theta)\})_1}{\cos(\theta)}, \tan\right)$

$$eqB := \tan(\theta) = -\frac{\mu l_f}{h \mu - l} \quad (16)$$

> $lhs(eqB) \leq rhs(eqB)$

$$\tan(\theta) \leq -\frac{\mu l_f}{h \mu - l} \quad (17)$$

また、後輪駆動車が後転しないで登坂するには、前輪抗力 $N_f \geq 0$ である必要があります。

後輪接地点を中心とする力のモーメントのつり合いの式から、以下が求められます。

> $\tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h}$:

▼ 参考：導出方法

前輪抗力 $N_f \geq 0$ を定義すると、以下の式が得られます。

> $0 \leq rhs(Nf1)$

$$0 \leq \frac{W(l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta))}{l} \quad (18)$$

考慮する式は、以下のものとなります。

> $0 \leq l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta)$

$$0 \leq l_r \cos(\theta) - h \sin(\theta) \quad (19)$$

両辺に $h \sin(\theta)$ を足します。

> (19) + $h \sin(\theta)$

$$h \sin(\theta) \leq l_r \cos(\theta) \quad (20)$$

よって、以下の式を得ます。

> $\tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h}$

$$\tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h} \quad (21)$$

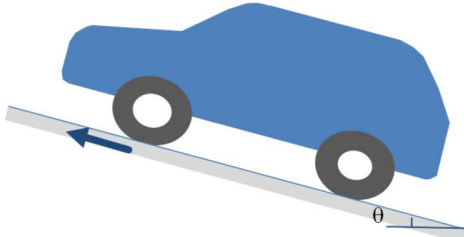
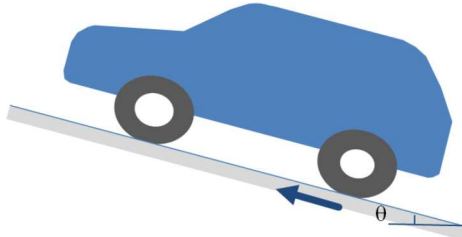
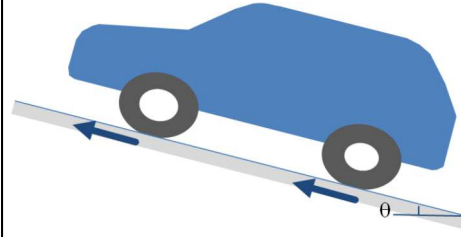
▼ 4輪駆動車の登坂角

4輪駆動車の登坂の条件は $F = \mu \cdot W \cdot \cos(\theta) \geq W \cdot \sin(\theta)$ となります。よって、 $\tan(\theta) = \mu$ となり、最大登坂角は摩擦係数と一致します。

4輪駆動車も式 $\tan(\theta) \leq \frac{l_r}{h}$ を満たす必要があります。

▼ 最大登坂角まとめ

駆動方式と最大登坂角

前輪駆動車	後輪駆動車	4輪駆動車
$\tan(\theta) = \frac{\mu \cdot l_r}{l + \mu \cdot h}$ 	$\tan(\theta) = \frac{\mu \cdot l_r}{l - \mu \cdot h} \leq \frac{l_r}{h}$ 	$\tan(\theta) = \mu \leq \frac{l_r}{h}$ 

最大登坂角は、角度(θ)や百分率による $100 \cdot \tan \theta$ [%]などで表現される場合もあります。

このようにして、最大登坂角を求める式が得られました。

▼ 参考文献

竹原伸 (2014) 『はじめての自動車運動学 力学の基礎から学ぶクルマの動き』, 森北出版株式会社

無断転載禁止

Copyright © 2016 CYBERNET SYSTEMS CO., LTD. All rights reserved.