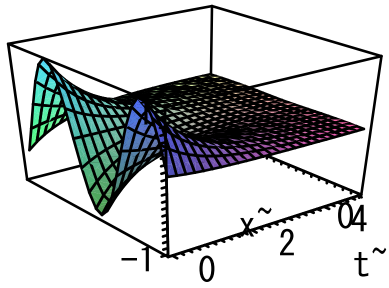
ラプラス方程式の理論解析

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = 0$$

$$u(x,t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,\pi\,\phi(\xi)\,t}{(x-\xi)^2+t^2}\,d\xi}{4\,\pi^2}$$



Maple 上での偏微分方程式の基本

Maple には、偏微分方程式の解関数を求めるための pdsolve コマンドが用意されていますが、それ以外にも偏微分方程式系で表される問題の解析（理論解の構築）に役立つコマンド／パッケージがいくつか用意されています。本資料では特にフーリエ変換を用いた解析方法について紹介しています。
より詳しい説明については、Maple Application Center に掲載されているこちらの事例を参照ください。(閲覧・ダウンロードには Maplesoft.com メンバー登録が必要となります)

> *restart*

偏微分方程式の入力を行う際は diff_table コマンドを用いると便利です。diff_table コマンドは PDEtools パッケージで用意されています；

> *with(PDEtools)*

[*CanonicalCoordinates, ChangeSymmetry, CharacteristicQ, ConservedCurrentTest, ConservedCurrents, D_Dx, DeterminingPDE, Eta_k, Euler, FromJet, InfinitesimalGenerator, Infinitesimals, IntegratingFactorTest, IntegratingFactors, InvariantSolutions, InvariantTransformation, Invariants, Laplace, PDEplot, ReducedForm, SimilaritySolutions, SimilarityTransformation, SymmetryTest, SymmetryTransformation, TWSolutions, ToJet, build, casesplit, charstrip, dchange, dcoeffs, declare, diff_table, difforder, dpolyform, dsubs, mapde, separability, splitstrip, splitsys, undeclare*] **(1.1)**

diff_table コマンドに関数 $p(x,y,z)$ を渡し、その結果を大文字 P に割り当てます。なお、2D Math モードでアンダースコア（_ 記号）を入力するには バックスラッシュ（\ 記号）を入力してからアンダースコア記号を入力してください。

> $P := diff\_table(p(x,y,z))$

$$P := \mathrm{table}(symmetric, ODEtools/diff, [() = p(x,y,z)]) \quad \textbf{(1.2)}$$

これにより、P[変数名] の記述で偏微分を定義できます。

> $P[x]$

$$\frac{\partial}{\partial x} p(x,y,z) \quad \textbf{(1.3)}$$

> $P[x,y]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} p(x,y,z) \quad \textbf{(1.4)}$$

> $P[x,x]$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, p(x, y, z) \qquad (1.5)$$

従って、例えば放物型偏微分方程式の入力は以下のように行えるので、diff コマンドでタイプするよりも間違えにくく効率的です。

> $pde := P[x, x] + \frac{1}{x} P[x] - 4\, P[y, z]$

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, p(x, y, z) + \frac{\frac{\partial}{\partial x}\, p(x, y, z)}{x} - 4\, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\, p(x, y, z) \qquad (1.6)$$

また、この一般解の計算の際に、HINT オプションや build オプションを指定することで、自動的に解関数の（明示的な）構築を行うよう指定できます。

> $sol := pdsolve(pde, HINT = `*`, build)$

$$sol := p(x, y, z) = \_C3\, e^{\_c_2 y}\, \_C4\, e^{\frac{\_c_1 z}{4 \_c_2}}\, \_C1\, J_0\left(\sqrt{-\_c_1}\, x\right) + \_C3\, e^{\_c_2 y}\, \_C4\, e^{\frac{\_c_1 z}{4 \_c_2}}\, \_C2\, Y_0\left(\sqrt{-\_c_1}\, x\right) \qquad (1.7)$$

>

フーリエ変換を用いた理論解の構築

偏微分方程式をフーリエ変換を用いて解く方法は理論的に構築されていますが、Maple 上でも同様の作業を各計算コマンドにより実現できます。ここでは、その手順およびコマンドについて紹介します。

ここでは、ラプラス方程式に対するフーリエ変換による理論解の構築を Maple 上で挑戦していきます。まず、ラプラス方程式の入力です。これには、VectorCalculus パッケージの Laplacian コマンドを使うと即座に入力できます。

> $pde := VectorCalculus[Laplacian](u(x, t), [x, t]) = 0$

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x, t) = 0 \qquad (2.1)$$

境界条件：

> $BC := u(x, 0) = \phi(x)$

$$BC := u(x, 0) = \phi(x) \qquad (2.2)$$

解法にあたって、時刻 $t > 0$ とします。このような変数への仮定は assume コマンドで行えます。

> $assume(t > 0)$

さて、ここから実際にフーリエ変換による pde の解析解の構築を行うため、inttrans パッケージを読み込みます。

> $with(inttrans)$

$$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable] \qquad (2.3)$$

与えられたラプラス方程式 pde をフーリエ変換します。

> $fourier(pde, x, w)$

$$-w^2\, fourier(u(x, t\sim), x, w) + \frac{\partial^2}{\partial t\sim^2}\, fourier(u(x, t\sim), x, w) = 0 \qquad (2.4)$$

ここで、$u(x, t)$のフーリエ変換を $v(t)$ とします。なお、式番号を参照して計算を行う場合は、Ctrl + L を押して式番号の入力を行います：

> $subs(\,fourier(u(x,t),x,w)=v(t),\,\mathbf{(2.4)})$

$$-w^2\,v(t\sim)+\ddot{v}(t\sim)=0 \tag{2.5}$$

以上の変換により、pde は常微分方程式に変換できました。dsolve コマンドでこの常微分方程式を解いてみます。なお、その際には境界条件についても同様にフーリエ変換した式で与えます。

> $dsolve(\{\mathbf{(2.5)},\,v(0)=fourier(rhs(BC),x,w)\},\,v(t))$

$$v(t\sim)=\left(fourier(\phi(x),x,w)-\_C2\right)\mathrm{e}^{-w\,t\sim}+\_C2\,\mathrm{e}^{w\,t\sim} \tag{2.6}$$

上記の結果から、$v(t)=\mathrm{e}^{-|w|\cdot t}\cdot fourier(\phi(x),x,w)$ がいえます。これを逆フーリエ変換します。

> $invfourier(\exp(-\mathrm{abs}(w)\cdot t)\cdot fourier(\phi(x),x,w),\,w,\,x)$

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\,\pi\,\phi(-\_U1)\,t\sim}{t\sim^2+x^2+2\,x\,\_U1+\_U1^2}\,\mathrm{d}\_U1}{4\,\pi^2} \tag{2.7}$$

上記の結果式で使われている _U1 は逆フーリエ変換中に生じた変数です。
$\_U1=-\xi$ という変数変換を施してみます。変数変換は PDEtools 内に用意されている dchange コマンドで行えます。

> $dchange(\_U1=-\xi,\,\mathbf{(2.7)})$

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\,\pi\,\phi(\xi)\,t\sim}{t\sim^2+x^2-2\,x\,\xi+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi}{4\,\pi^2} \tag{2.8}$$

被積分式の分母部分を平方完成してみます。

> $u(x,t)=Student[Precalculus][CompleteSquare](\mathbf{(2.8)})$

$$u(x,t\sim)=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\,\pi\,\phi(\xi)\,t\sim}{(\xi-x)^2+t\sim^2}\,\mathrm{d}\xi}{4\,\pi^2} \tag{2.9}$$

このようにして、ラプラス方程式の解析を得ることが出来ました。実際にいくつかの境界条件を与えてシミュレーションを行ってみます。
境界条件は

> BC

$$u(x,0)=\phi(x) \tag{2.10}$$

として、関数ϕ (phi と入力)で定義できます。まず先に $x>0$ を仮定しておきます。

> $assume(x\geq 0)$

phi を定義します。

> $\phi:=x\rightarrow\sin(x)$

$$\phi:=x\mapsto\sin(x) \tag{2.11}$$

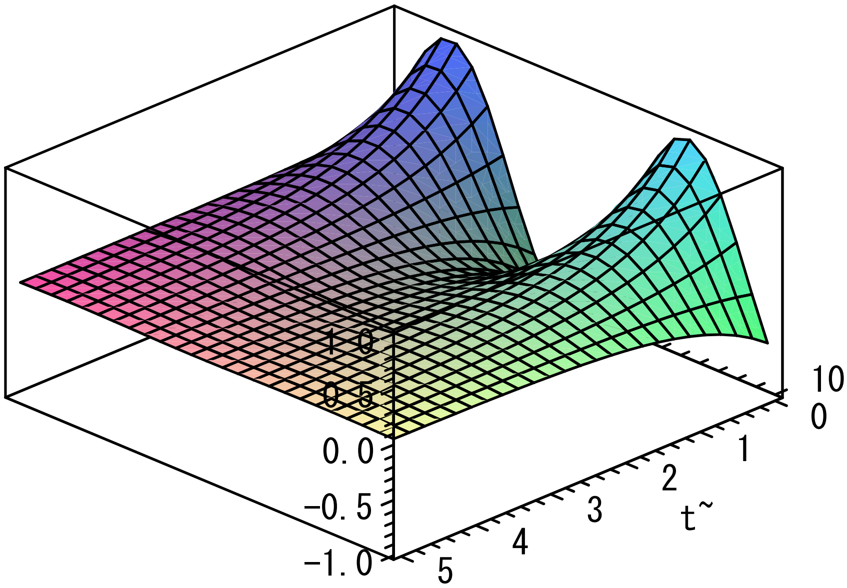
この場合の解関数は以下となります；

> $value(\mathbf{(2.9)})$

$$u(x\sim,t\sim)=\frac{1}{4\,\pi^2}\Big(-2\,\mathrm{I}\,\pi^2\cos(x\sim+\mathrm{I}\,t\sim)+2\,\pi^2\sin(x\sim+\mathrm{I}\,t\sim)+2\,\mathrm{I}\,\pi^2\cos(-x\sim+\mathrm{I}\,t\sim)-2\,\pi^2\sin(-x\sim+\mathrm{I}\,t\sim)\Big) \tag{2.12}$$

この解関数をプロットしてみます。

> $plot3d(rhs(\mathbf{(2.12)}),\,t=0..5,\,x=0.1..10,\,axes=boxed)$

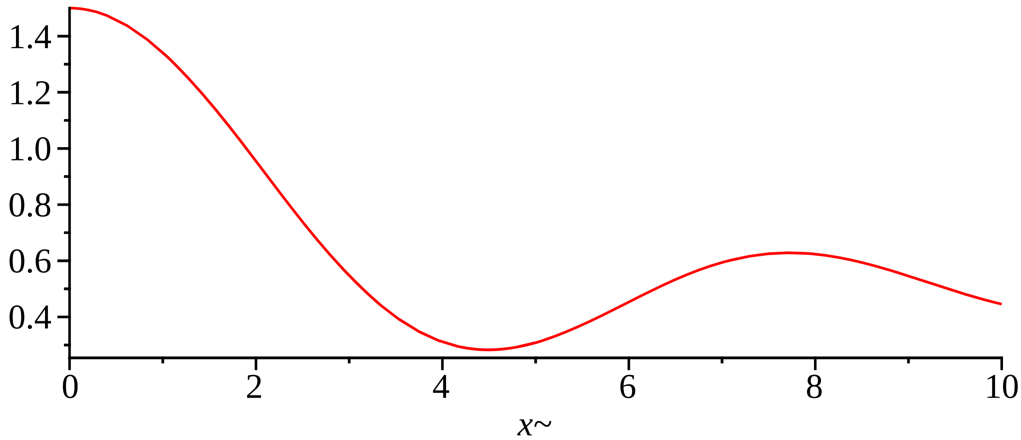


同様に、別の境界条件の際の振る舞いを確認してみます；

> $\phi := x \to \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{2}$

$$\phi := x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.13)}$$

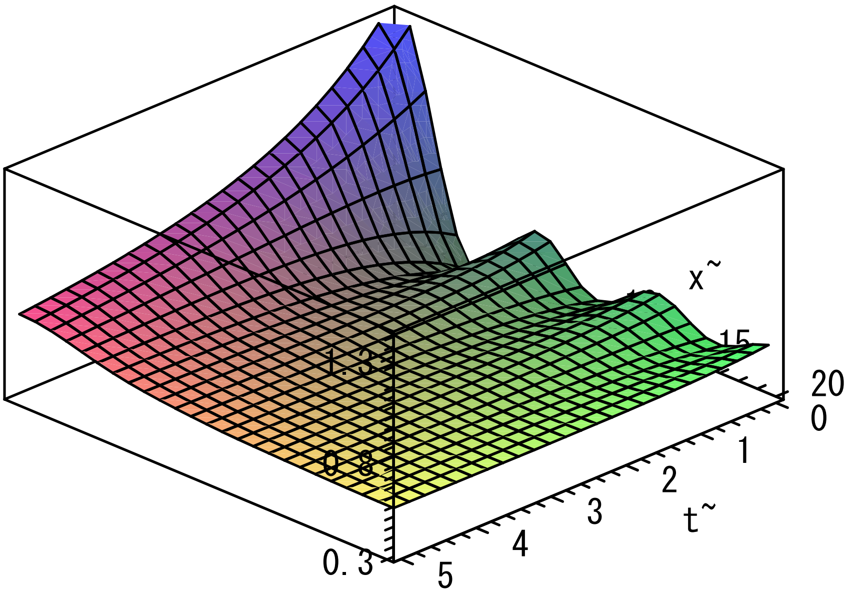
> $plot(\phi(x), x = 0\,..10)$



> $value(\textbf{(2.9)})$

$$u(x\sim, t\sim) = -\frac{1}{4\,(t\sim^2 + x\sim^2)}\big(\mathrm{I}\,x\sim\cos(x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) - 2\,t\sim^2 - 2\,x\sim^2 + 2\,x\sim\sin(-x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) - 2\,x\sim\sin(x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) + 2\,\mathrm{I}\,t\sim\sin(-x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) + t\sim\cos(-x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) + t\sim\cos(x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) - 4\,t\sim - \mathrm{I}\,x\sim\cos(-x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) + 2\,\mathrm{I}\,t\sim\sin(x\sim + \mathrm{I}\,t\sim) + 2\,x\sim\sin(x\sim)\sinh(t\sim) + 2\,t\sim\cos(x\sim)\cosh(t\sim)\big) \qquad \textbf{(2.14)}$$

> $plot3d(rhs(\textbf{(2.14)}), t = 0\,..5, x = 0\,..20\,, axes = boxed)$


x~
20
0
1
2
3
t~
4
5
0.3
0.8

>