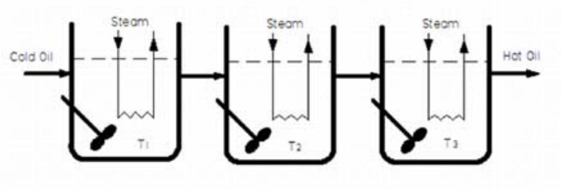
スチームヒートタンク内のオイル熱流の温度解析

モデル模式図



この例題では、連結したスチームヒートタンク内にオイルが流れた際の過渡温度特性について解析を行います。Maple の数式処理機能を用いることで、無限時間での定常状態の解析を数式モデルベースに実現することが可能です。

▼ モデル式の設定

> $restart$

diff_table コマンドで省略入力を行うため、PDEtools パッケージを読み込みます。

> $with(PDEtools):$

各タンクの温度関数 tank1(t), tank2(t), tank3(t) の diff_table をそれぞれ T1, T2, T3 とします。

> $T1 := diff\_table(tank1(t)):$
$T2 := diff\_table(tank2(t)):$
$T3 := diff\_table(tank3(t)):$

化学工学の反応式モデルから、各タンクでの過渡温度モデルは以下のように定義されます；

> $sys1 := M \cdot Cp \cdot T1[t] = W \cdot Cp \cdot (T0 - T1[\,]) + U \cdot A \cdot (Ts - T1[\,])$

$$sys1 := M\,Cp\,tank1(t) = W\,Cp\,(T0 - tank1(t)) + U\,A\,(Ts - tank1(t)) \tag{1.1}$$

> $sys2 := M \cdot Cp \cdot T2[t] = W \cdot Cp \cdot (T1[\,] - T2[\,]) + U \cdot A \cdot (Ts - T2[\,])$

$$sys2 := M\,Cp\,tank2(t) = W\,Cp\,(tank1(t) - tank2(t)) + U\,A\,(Ts - tank2(t)) \tag{1.2}$$

> $sys3 := M \cdot Cp \cdot T3[t] = W \cdot Cp \cdot (T2[\,] - T3[\,]) + U \cdot A \cdot (Ts - T3[\,])$

$$sys3 := M\,Cp\,tank3(t) = W\,Cp\,(tank2(t) - tank3(t)) + U\,A\,(Ts - tank3(t)) \tag{1.3}$$

以下は初期条件です；

> $IC := tank1(0) = T0, tank2(0) = T0, tank3(0) = T0$

$$IC := tank1(0) = T0, tank2(0) = T0, tank3(0) = T0 \tag{1.4}$$

また、上のモデル式で用いた各パラメータは以下となります。

パラメータ	説明	単位
W	オイル流量	$\frac{kg}{s}$

M	各タンクでのオイル質量	kg
C_p	熱容量	$\frac{J}{kg \cdot K}$
U	伝熱係数	$\frac{W}{m^2 \cdot K}$
A	伝熱面積	m^2
T_0	冷却オイル温度	C
$T_1(t)$, $T_2(t)$, $T_3(t)$	各タンクでの過渡温度	C
T_s	スチーム温度	C

理論的な解析

Maple の数式解法機能を用いて、パラメータを含んだままモデルを解き、過渡温度応答を求めます。

> $dsol := dsolve(\{sys1, sys2, sys3, IC\})$

$$dsol := \left\{ tank1(t) = \frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U\,A\,(-Ts+T0)}{U\,A+Cp\,W} + \frac{U\,A\,Ts}{U\,A+Cp\,W} + \frac{W\,Cp\,T0}{U\,A+Cp\,W}, tank2(t) = \frac{1}{M\,(U\,A+Cp\,W)^2}\left(\frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W\,U^3\,A^3\,(-Ts+T0)\,t}{U\,A+Cp\,W} + \frac{2\,e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W^2\,U^2\,A^2\,(-Ts+T0)\,t\,Cp}{U\,A+Cp\,W} + \frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,Cp^2\,W^3\,U\,A\,(-Ts+T0)\,t}{U\,A+Cp\,W} + Cp^2\,W^2\,T0\,M + 2\,Cp\,W\,U\,A\,Ts\,M + U^2\,A^2\,Ts\,M + \frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^3\,A^3\,(-2\,Cp\,W\,Ts - U\,A\,Ts + U\,A\,T0 + 2\,W\,Cp\,T0)\,M}{U^2\,A^2 + 2\,U\,A\,Cp\,W + Cp^2\,W^2} + \frac{2\,e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^2\,A^2\,(-2\,Cp\,W\,Ts - U\,A\,Ts + U\,A\,T0 + 2\,W\,Cp\,T0)\,Cp\,W\,M}{U^2\,A^2 + 2\,U\,A\,Cp\,W + Cp^2\,W^2}\right.$$

$$+\frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,UA\,(-2\,Cp\,W\,Ts-UA\,Ts+UA\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,Cp^2\,W^2\,M}{U^2\,A^2+2\,UA\,Cp\,W+Cp^2\,W^2}\Bigg)$$

$$, tank3(t)$$

$$=\Bigg(\frac{1}{2\,(UA+Cp\,W)^4\,M^2}\big((W^2\,U^3\,A^3\,t^2+3\,W^4\,Cp^2\,UA\,t^2+3\,W^3\,U^2\,A^2\,t^2\,Cp$$

$$+W^5\,Cp^3\,t^2)\,UA\,(-Ts+T0)\big)+\big((2\,W\,U^3\,A^3\,M\,t+6\,W^3\,Cp^2\,UA\,M\,t$$

$$+2\,W^4\,Cp^3\,M\,t+6\,W^2\,U^2\,A^2\,M\,t\,Cp)\,UA\,(-2\,Cp\,W\,Ts-UA\,Ts+UA\,T0$$

$$+2\,W\,Cp\,T0)\big)\Big/\big(2\,(UA+Cp\,W)^3\,M^2\,(U^2\,A^2+2\,UA\,Cp\,W+Cp^2\,W^2)\big)$$

$$+\big((2\,U^3\,A^3\,M^2+6\,UA\,M^2\,Cp^2\,W^2+2\,W^3\,Cp^3\,M^2+6\,U^2\,A^2\,M^2\,Cp\,W)\,UA\,(-3\,Cp\,W\,UA\,Ts-3\,T$$

$$+W^3\,Cp^3)\big)\big)\,e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}$$

$$+\frac{(6\,UA\,M^2\,Cp^2\,W^2+6\,U^2\,A^2\,M^2\,Cp\,W+2\,U^3\,A^3\,M^2)\,Ts}{2\,(UA+Cp\,W)^3\,M^2}+\frac{W^3\,Cp^3\,T0}{(UA+Cp\,W)^3}\Bigg\}$$

各タンクの温度関数を t1, t2, t3 として割り当てます。

> $t1 := eval(tank1(t), dsol)$

$$t1 := \frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,UA\,(-Ts+T0)}{UA+Cp\,W}+\frac{UA\,Ts}{UA+Cp\,W}+\frac{W\,Cp\,T0}{UA+Cp\,W} \tag{2.2}$$

> $t2 := eval(tank2(t), dsol)$

$$t2 := \frac{1}{M\,(UA+Cp\,W)^2}\Bigg(\frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W\,U^3\,A^3\,(-Ts+T0)\,t}{UA+Cp\,W} \tag{2.3}$$

$$+\frac{2\,e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W^2\,U^2\,A^2\,(-Ts+T0)\,t\,Cp}{UA+Cp\,W}$$

$$+\frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,Cp^2\,W^3\,UA\,(-Ts+T0)\,t}{UA+Cp\,W}+Cp^2\,W^2\,T0\,M+2\,Cp\,W\,UA\,Ts\,M$$

$$+U^2\,A^2\,Ts\,M$$

$$+\frac{e^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^3\,A^3\,(-2\,Cp\,W\,Ts-UA\,Ts+UA\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,M}{U^2\,A^2+2\,UA\,Cp\,W+Cp^2\,W^2}$$

$$+\frac{2\,\mathrm{e}^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^2A^2\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,Cp\,W\,M}{U^2A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2W^2}$$
$$+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U\,A\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,Cp^2W^2M}{U^2A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2W^2}\Bigg)$$

> $t3 := eval(tank3(t), dsol)$

$$t3 := \Bigg(\frac{1}{2\,(UA+Cp\,W)^4M^2}\Big(\big((W^2U^3A^3t^2+3\,W^4Cp^2\,U\,A\,t^2+3\,W^3U^2A^2t^2Cp+W^5Cp^3t^2)\,U\,A\,(-Ts+T0)\big)+\big((2\,W\,U^3A^3M\,t+6\,W^3Cp^2\,U\,A\,M\,t+2\,W^4Cp^3M\,t+6\,W^2U^2A^2M\,t\,Cp)\,U\,A\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\big)\Big/\big(2\,(UA+Cp\,W)^3M^2\,(U^2A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2W^2)\big)+\big((2\,U^3A^3M^2+6\,U\,A\,M^2Cp^2W^2+2\,W^3Cp^3M^2+6\,U^2A^2M^2Cp\,W)\,U\,A\,(-3\,Cp\,W\,U\,A\,Ts-3\,Ts\,Cp^2W^2-U^2A^2Ts+T0\,U^2A^2+3\,Cp^2W^2T0+3\,T0\,U\,A\,Cp\,W)\big)\Big/\big(2\,(UA+Cp\,W)^3M^2\,(U^3A^3+3\,W^2Cp^2\,U\,A+3\,W\,U^2A^2Cp+W^3Cp^3)\big)\Big)\,\mathrm{e}^{-\frac{(UA+Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}+\frac{(6\,U\,A\,M^2Cp^2W^2+6\,U^2A^2M^2Cp\,W+2\,U^3A^3M^2)\,Ts}{2\,(UA+Cp\,W)^3M^2}+\frac{W^3Cp^3\,T0}{(UA+Cp\,W)^3} \quad (2.4)$$

パラメータのサンプル値を各パラメータの単位量で定義して、具体的な過渡温度応答をグラフ化します。単位計算を可能にするため、Units[Standard]パッケージを利用します。

> $with(Units[Standard])$

[`*`, `+`, `-`, `/`, `<`, `<=`, `<>`, `=`, ℑ, ℜ, *Unit*, `^`, abs, *add*, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, argument, ceil, *collect*, *combine*, *conjugate*, *convert*, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, csgn, *diff*, *eval*, *evalc*, *evalr*, exp, *expand*, *factor*, floor, frac, *int*, ln, log, log10, max, min, *mul*, *normal*, polar, *root*, round, sec, sech, *seq*, *shake*, signum, *simplify*, sin, sinh, sqrt, surd, tan, tanh, trunc, *type*, *verify*] (2.5)

サンプル値データを sampleValues 変数に定義します。ここで、冷却オイルの温度は 10 度、スチーム温度は 250 度としています。

> $sampleValues := \left[W=100\cdot Unit\left(\frac{kg}{s}\right), M=1000\cdot Unit(kg), Cp=2\cdot Unit\left(\frac{J}{kg\cdot K}\right), U=10\cdot Unit\left(\frac{W}{m^2\cdot K}\right), A=1\cdot Unit(m^2), T0=10\cdot Unit(degC), Ts=250\cdot Unit(degC), t=t\cdot Unit(s)\right]$

$$sampleValues := \left[W=100\left[\!\left[\frac{kg}{s}\right]\!\right], M=1000\,[\![kg]\!], Cp=2\left[\!\left[\frac{m^2}{s^2K}\right]\!\right], U=10\left[\!\left[\frac{kg}{s^3K}\right]\!\right], \right. \quad (2.6)$$

$$A = [\![m^2]\!],\ T0 = 10\ [\![degC]\!],\ Ts = 250\ [\![degC]\!],\ t = t\ [\![s]\!]\Big]$$

これらのパラメータ値を先程求めた理論解に代入します。各パラメータの単位量を整理して、タンクの温度単位へと簡単化されている点に注意してください。

> $tlist := eval([t1, t2, t3], sampleValues)$

$$tlist := \left[\left(-\frac{80\,e^{-\frac{21\,t}{200}}}{7} + \frac{150}{7}\right)[\![K]\!],\ \left(-\frac{8\,e^{-\frac{21\,t}{200}}\,t}{7} + \frac{4750}{147} - \frac{3280\,e^{-\frac{21\,t}{200}}}{147}\right)[\![K]\!],\ \left(\left(-\frac{2}{35}\,t^2 - \frac{328}{147}\,t - \frac{100880}{3087}\right)e^{-\frac{21\,t}{200}} + \frac{131750}{3087}\right)[\![K]\!]\right] \tag{2.7}$$

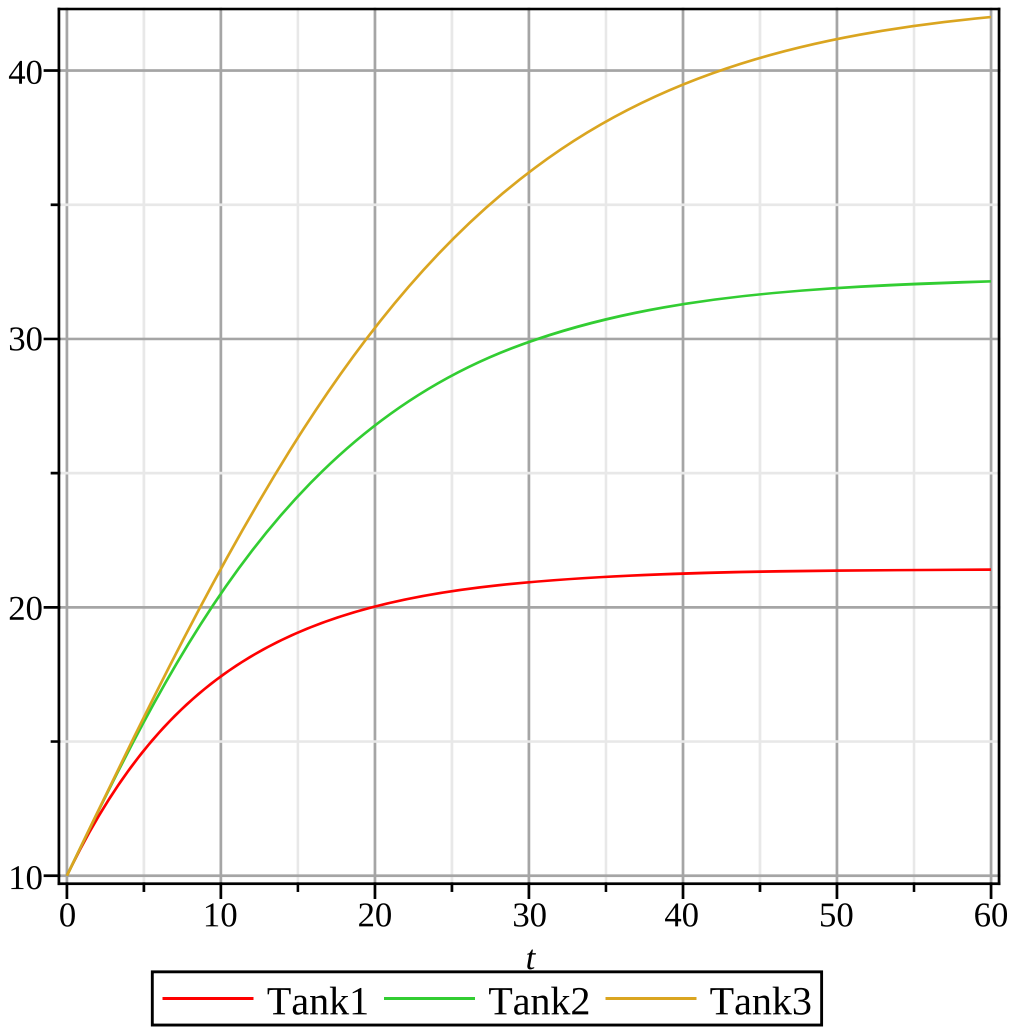
単位量を一旦はずして、温度応答をグラフ化します。

> $tlistUnitFree := map(p \to convert(p, unit\_free), tlist)$

$$tlistUnitFree := \left[-\frac{80\,e^{-\frac{21\,t}{200}}}{7} + \frac{150}{7},\ -\frac{8\,e^{-\frac{21\,t}{200}}\,t}{7} + \frac{4750}{147} - \frac{3280\,e^{-\frac{21\,t}{200}}}{147},\ \left(-\frac{2}{35}\,t^2 - \frac{328}{147}\,t - \frac{100880}{3087}\right)e^{-\frac{21\,t}{200}} + \frac{131750}{3087}\right] \tag{2.8}$$

時刻 $t = 0$ から $t = 60$ 秒までの応答です。

> $plot(tlistUnitFree, t = 0\,..60,$
> $axes = boxed, gridlines = true,$
> $legend = [\text{"Tank1"}, \text{"Tank2"}, \text{"Tank3"}])$



無限時間定常状態時の解析

Maple の記号計算機能を用いることで、時刻 t を無限時間としたときの解析を簡単に行うことが可能です。tank1(t), tank2(t), tank3(t) それぞれの温度過渡応答について、時刻を無限時間としたときの極限を計算してみます。なお、各物性量等のパラメータはすべて正数であると仮定します。
まず、tank1 についてです。理論解を割り当てている dsol 変数から tank1 のみを取り出し、伝熱係数に関して部分分数分解を行ってみます。

> $eval(tank1(t), dsol)$

$$\frac{e^{\frac{(-UA - Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,UA\,(-Ts + T0)}{UA + Cp\,W} + \frac{UA\,Ts}{UA + Cp\,W} + \frac{W\,Cp\,T0}{UA + Cp\,W} \tag{3.1}$$

> $\lim_{t \to \infty}$ (3.1) assuming $positive$

$$\frac{W\,Cp\,T0 + UA\,Ts}{UA + Cp\,W} \tag{3.2}$$

> $convert($(3.2)$, parfrac, U)$

$$Ts + \frac{W\,Cp\,(-Ts + T0)}{UA + Cp\,W} \tag{3.3}$$

これが時刻 t を無限としたときの状態量となります。
同様に tank2, tank3 についても解析してみます。

> $eval(tank2(t), dsol)$

$$\frac{1}{M\,(UA+Cp\,W)^2}\left(\frac{e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W\,U^3\,A^3\,(-Ts+T0)\,t}{UA+Cp\,W}+\frac{2\,e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,W^2\,U^2\,A^2\,(-Ts+T0)\,t\,Cp}{UA+Cp\,W}+\frac{e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,Cp^2\,W^3\,U\,A\,(-Ts+T0)\,t}{UA+Cp\,W}+Cp^2\,W^2\,T0\,M+2\,Cp\,W\,U\,A\,Ts\,M+U^2\,A^2\,Ts\,M+\frac{e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^3\,A^3\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,M}{U^2\,A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2\,W^2}+\frac{2\,e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U^2\,A^2\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,Cp\,W\,M}{U^2\,A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2\,W^2}+\frac{e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}\,U\,A\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\,Cp^2\,W^2\,M}{U^2\,A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2\,W^2}\right) \tag{3.4}$$

> $\lim_{t\to\infty}$ (3.4) assuming *positive*

$$\frac{Cp^2\,W^2\,T0+2\,Cp\,W\,U\,A\,Ts+U^2\,A^2\,Ts}{U^2\,A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2\,W^2} \tag{3.5}$$

> *convert*((3.5), *parfrac*, *U*)

$$Ts+\frac{Cp^2\,W^2\,(-Ts+T0)}{(U\,A+Cp\,W)^2} \tag{3.6}$$

最後に tank3 についてです。

> *eval*(*tank3*(*t*), *dsol*)

$$\left(\frac{1}{(U\,A+Cp\,W)^4\,M^2}\left(\left(\frac{1}{2}\,W^2\,U^3\,A^3\,t^2+\frac{3}{2}\,W^4\,Cp^2\,U\,A\,t^2+\frac{3}{2}\,W^3\,U^2\,A^2\,t^2\,Cp+\frac{1}{2}\,W^5\,Cp^3\,t^2\right)U\,A\,(-Ts+T0)\right)+\left(\left(W\,U^3\,A^3\,M\,t+3\,W^3\,Cp^2\,U\,A\,M\,t+W^4\,Cp^3\,M\,t+3\,W^2\,U^2\,A^2\,M\,t\,Cp\right)U\,A\,(-2\,Cp\,W\,Ts-U\,A\,Ts+U\,A\,T0+2\,W\,Cp\,T0)\right)\Big/\left((U\,A+Cp\,W)^3\,M^2\,(U^2\,A^2+2\,U\,A\,Cp\,W+Cp^2\,W^2)\right)+\left(\left(U^3\,A^3\,M^2+3\,U\,A\,M^2\,Cp^2\,W^2+W^3\,Cp^3\,M^2+3\,U^2\,A^2\,M^2\,Cp\,W\right)U\,A\,\left(-3\,Cp\,W\,U\,A\,Ts-3\,Ts\,Cp\cdots+W^3\,Cp^3\right)\right)\right)e^{\frac{(-UA-Cp\,W)\,t}{M\,Cp}}+\frac{\left(3\,U\,A\,M^2\,Cp^2\,W^2+3\,U^2\,A^2\,M^2\,Cp\,W+U^3\,A^3\,M^2\right)Ts}{(U\,A+Cp\,W)^3\,M^2}+\frac{W^3\,Cp^3\,T0}{(U\,A+Cp\,W)^3}$$

> $\lim_{t \to \infty}$(3.7) assuming *positive*

$$\frac{3\,U\,A\,Ts\,Cp^2\,W^2 + 3\,U^2\,A^2\,Ts\,Cp\,W + U^3\,A^3\,Ts + W^3\,Cp^3\,T0}{U^3\,A^3 + 3\,W^2\,Cp^2\,U\,A + 3\,W\,U^2\,A^2\,Cp + W^3\,Cp^3} \tag{3.8}$$

> *convert*((3.8), *parfrac*, *U*)

$$Ts + \frac{W^3\,Cp^3\,(-Ts + T0)}{(U\,A + Cp\,W)^3} \tag{3.9}$$

得られた各タンクの無限時刻での温度応答を比較してみます；

> (3.3), (3.6), (3.9)

$$Ts + \frac{W\,Cp\,(-Ts + T0)}{U\,A + Cp\,W},\ Ts + \frac{Cp^2\,W^2\,(-Ts + T0)}{(U\,A + Cp\,W)^2},\ Ts + \frac{W^3\,Cp^3\,(-Ts + T0)}{(U\,A + Cp\,W)^3} \tag{3.10}$$

これから n 番目のタンクにおける無限時間での温度応答が

$$Ts - \frac{(W \cdot Cp)^n \cdot (Ts - T0)}{(U \cdot A + W \cdot Cp)^n}$$

の形となることが予想できます。

ここで、W: オイル流量、Cp : 熱容量、U : 伝熱係数、A : 伝熱面積、です。