

Maple 16での処理効率の改善

Maple 16 では、多項式の計算について多くの効率性の改善が行われています。

- [多項式算術](#)
- [多項式因数分解](#)
- [多項式のイデアル分解](#)
- [コンパイルによる数値 PDE 解](#)

多項式算術

過去の数回のリリースにおいて、Maple における多項式算術の効率は劇的に改善されています。

- 乗算とべき乗 ([expand](#), [Expand mod n](#), [Power mod n](#), [Powmod](#))
- 整除 ([divide](#), [Divide mod n](#))
- 整数係数を持つ単変量多項式および多変量多項式
- 密および疎な多項式

これは、さまざまなテクニックの組み合わせにより実現されています。

- 新規の高速ヒープベースかつ C でインプリメントされた効率的なアルゴリズム
- 新規のコンパクトな内部多項式データ構造
- マルチスレッドとキャッシュ局所性の活用

これらの改善により、Maple の過去のリリースの 22 倍、Mathematica® の最新版の 1800 倍の高速化を実現しています。

Maple の並列インプリメンテーションはさらなる高速化をもたらし、複数コアに対応することができます。

計算時間

乗算、密、3
変数、30 次

M14: 0.65
秒

M15: 0.73 秒

M16: 0.52 秒

Mathematica
8: 110 秒

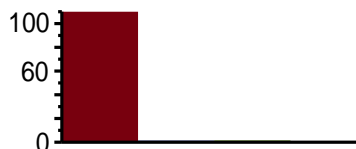
高速化

M16/M14:

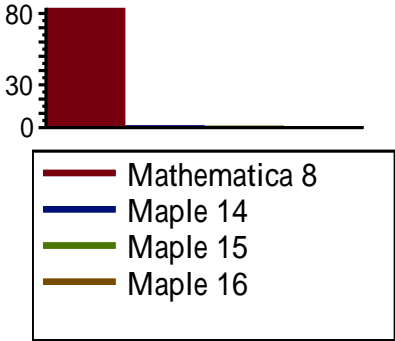
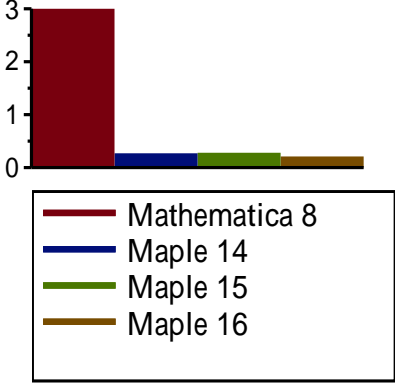
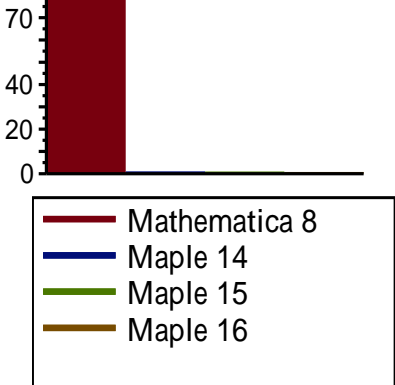
1.3

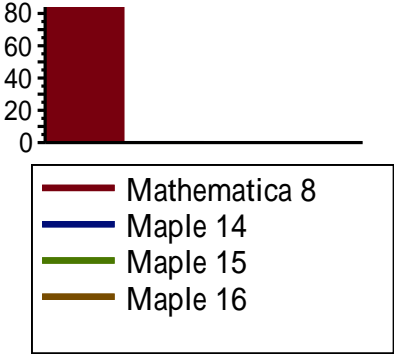
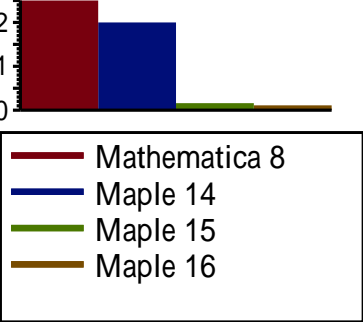
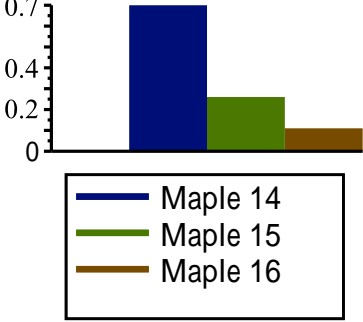
高速化

M16/Mathem
atica8: 210

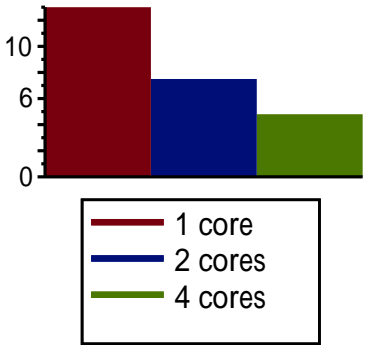
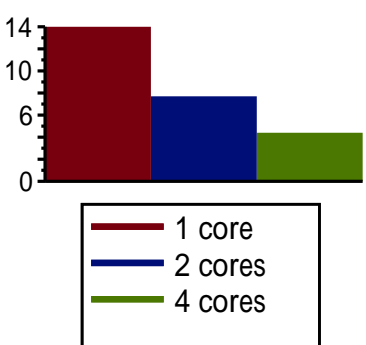


Mathematica 8
Maple 14
Maple 15
Maple 16

<p>除算、密、3 变数、 (60次 / degree 次)</p>	<p>M14: 0.88 秒 M15: 0.75 秒 M16: 0.54 秒 Mathematica 8: 84 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.6 高速化 M16/Mathem atica8: 160</p>	
<p>单变量乘算、 疎、100000 次、1000 項</p>	<p>M14: 0.27 秒 M15: 0.28 秒 M16: 0.21 秒 Mathematica 8: 3.0 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.3 高速化 M16/Mathem atica8: 14</p>	
<p>单变量除算、 疎、 (200000 次) / (100000 次)、 (180000 項) / (1000 項)</p>	<p>M14: 0.27s M15: 0.25s M16: 0.20s Mathematica 8: 78s</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.4 高速化 M16/Mathem atica8: 390</p>	

<p>非整除性テスト、密、3変数、 (<i>degree</i> 60) / (<i>degree</i> 30)</p>	<p>M14: 0.99 秒 M15: 0.090 秒 M16: 0.046 秒 Mathematica 8: 84 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 22 高速化 M16/Mathematica8: 1800</p>	 <p>Legend: Mathematica 8 (red), Maple 14 (blue), Maple 15 (green), Maple 16 (brown)</p>
<p>モジュラー除算、密、4変数、 512 bit prime、 (<i>degree</i> 30) / <i>linear</i></p>	<p>M14: 2.0 秒 M15: 0.16 秒 M16: 0.11 秒 Mathematica 8: 2.5 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 18 高速化 M16/Mathematica8: 23</p>	 <p>Legend: Mathematica 8 (red), Maple 14 (blue), Maple 15 (green), Maple 16 (brown)</p>
<p>単変量べき乗、多項式および31ビット素数のモジュロ、密、 1024 次</p>	<p>M14: 0.7 秒 M15: 0.26 秒 M16: 0.11 秒 Mathematica 8: コンピュータフリーズ</p>	<p>高速化 M16/M14: 6.4</p>	 <p>Legend: Maple 14 (blue), Maple 15 (green), Maple 16 (brown)</p>

複数コアでの計算時間

乗算、密、4 変数、20 次	M16, 1 コア: 13 秒 M16, 2 コア: 7.5 秒 M16, 4 コア: 4.8 秒	高速化 4 コア: 2.7	
除算、密、4 変数、(20 次) / (10 次)	M16, 1 コア: 14 秒 M16, 2 コア: 7.7 秒 M16, 4 コア: 4.4 秒	高速化 4 コア: 3.2	

多項式因数分解

Maple には多項式因数分解用の 2 つのコマンドがあります。多変量多項式をそれ以上分解不可能な既約因子へ乗法分解します。

最も簡単なのは、[factor](#) コマンドを使用した整数係数を持つ単変量多項式の場合です。

```
factor(x8 - 1)
```

$$(x - 1) (x + 1) (x^2 + 1) (x^4 + 1) \quad (2.1)$$

結果の因子の係数も整数であることを注意してください。たとえば、 $x^2 + 1$ は $(x - i)(x + i)$ には分解できません。より精密な分解を得るために、係数で使用する第二引数を指定することができます。

```
factor(x8 - 1, i)
```

$$(x^2 + 1) (-x^2 + 1) (-x + 1) (x + 1) (x - 1) (x + 1) \quad (2.2)$$

ほとんどの場合で、多項式は複数の変数を持ち、 i や $\sqrt{2}$ または $\sqrt{t - \sqrt{2}}$ などの非有理数式を含むことが可能です。入れ子形式または係数にパラメータを含む (例では t など) ことができます。そのような場合は、コマンド `evala(Factor(...))` によって処理します。しかし、このコマンドは、通常すべての累乗根が `RootOf` 形式で表される必要があります。

$$r := \text{RootOf}(_Z^2 - t) \quad \text{RootOf}(_Z^2 - t) \quad (2.3)$$

$$\text{factor}(x^2 - 2 r x + t) \quad x^2 - 2 \text{RootOf}(_Z^2 - t) x + t \quad (2.4)$$

$$\text{evala}(\text{Factor}(x^2 - 2 r x + t)) \quad (x - \text{RootOf}(_Z^2 - t))^2 \quad (2.5)$$

Maple 16 では `evala(Factor(...))` コマンドの計算効率、特に複数の入れ子形式の `RootOf` がある場合に劇的に改善されています。高速化は新規の効率的疎モジュラーアルゴリズムによるものです。たとえば、つぎの例の実行時間は、同一マシンで Maple 15 よりも約 20 倍高速になっています。

`restart : randomize(1) :`

$$z_1 := \text{convert}(\sqrt{2}, \text{RootOf}) \quad \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) \quad (2.6)$$

$$z_2 := \text{convert}(t^{1/3}, \text{RootOf}) \quad \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1) \quad (2.7)$$

$$f := \text{evala}(\text{Reduce}(\text{randpoly}([x, y, z_1, z_2, t]))) \quad 34 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) - 20 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) \quad (2.8)$$

$$+ 93 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t + 45 x^3 t^2 + 30 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1)^2 - 56 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1) t$$

$$g := \text{evala}(\text{Reduce}(\text{randpoly}([x, y, z_1, z_2, t]))) \quad 47 t^2 + 40 x^2 t + 114 y \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) + 58 x^3 y t + 43 x y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1)^2 t - 98 t \quad (2.9)$$

$$h := \text{evala}(\text{Expand}(f g)) \quad 21204 x^3 y t + 1360 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) x^2 t + 1972 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) x^3 t - 940 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t^2 - 800 x^3 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t - 1160 x^4 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t + 1960 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t + 5394 x^6 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t^2 y + 5130 x^3 t^2 y \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) + 1935 x^4 t^3 y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1)^2 + 1200 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1)^2 x^2 t + 1740 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} = 1)^2 x^3 t - 2240 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t^2 x^3 t - 2240 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} = 1) t^2 x^3 t \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 x^2 + 1290 t^2 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) x \\
& - 2408 t^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) x y + 1462 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) x \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t - 860 x^2 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t + 3999 x^4 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) t^2 y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 - 3248 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 x^3 y + 2115 x^3 t^4 + 1800 x^5 t^3 - 4410 x^3 t^3 \\
& - 4560 x y^3 + 2610 x^6 t^3 y + 1598 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 \\
& - 3332 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t + 4371 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^3 \\
& + 3720 x^5 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 - 9114 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 \\
& + 1410 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t^2 + 3420 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} \\
& =1)^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) - 2940 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t \\
& - 2632 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^3 \\
& + 5488 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 \\
& - 12768 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t y + 7752 y^3
\end{aligned}$$

CodeTools:-Usage(evala(Factor(h))) :

memory used=15.91MiB, alloc change=19.21MiB, cpu time=516.00ms,
real time=4.50s

つぎの表は、Maple 15 と比較したベンチマークを示しています。

変数	RootOfs	パラメータ	indicesの総数	次数	項	Maple 15	Maple 16	高速化
x, y, z	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - 3)$	—	5	10	36	5.0 s	0.21 s	24
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	36	6.1 s	0.34 s	18
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	134	18 s	0.36 s	50
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	276	29 s	0.68 s	43
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	20	36	24 s	0.42 s	57

素因数分解	円	5	1	2	6.8 s	0.82 s	8.3
素因数分解	vermeer	5	1	5	6.4 s	0.60 s	11
素因数分解	wang92 c	4	1	3	45 s	0.84 s	54
素因数分解	ctoa	10	4	2	> 5 min	0.54 s	> 550
素因数分解	butcher	7	3	4	> 5 min	0.42 s	> 710
累乗根	butcher	7	3	4	> 5 min	0.57 s	> 530

▼ コンパイルによる数値 PDF の解

- `compile` オプションが数値 `pdsolve` コマンドに追加され、PDE 数値解の効率的な計算ができます。詳細は、[pdsolve\[numeric\]](#) を参照してください。