

# 非線形最適制御によるAcrobotの振り上げ安定化

---

2014年12月18日  
MBD コンファレンス

堀部 貴雅 坂本 登  
名古屋大学 工学研究科 航空宇宙工学専攻

# 発表の流れ

---

- ・背景と目的

  - 劣駆動システムとAcrobot

- ・先行研究

  - Acrobotの振り上げ安定化

- ・提案手法の適用

  - 安定多様体法による制御器設計

  - Acrobotへの適用

- ・シミュレーション結果

- ・おわりに



# 発表の流れ

---

- ・背景と目的

  - 劣駆動システムとAcrobot

- ・先行研究

  - Acrobotの振り上げ安定化

- ・提案手法の適用

  - 安定多様体法による制御器設計

  - Acrobotへの適用

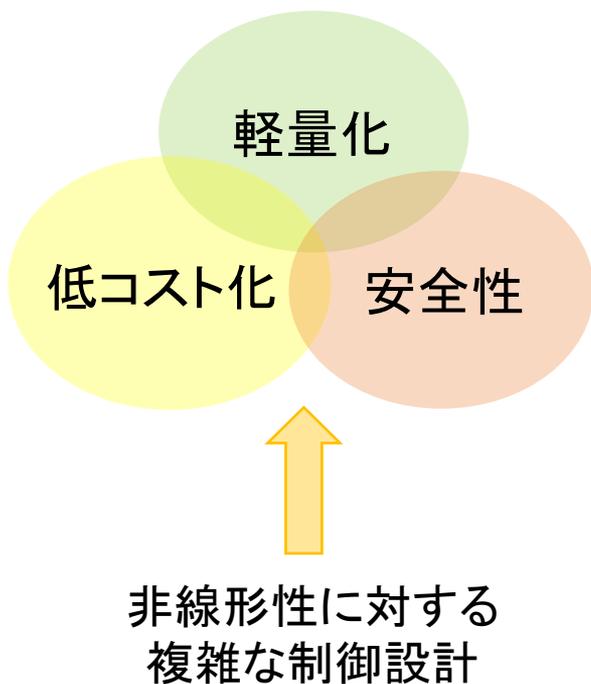
- ・シミュレーション結果

- ・おわりに



# 背景と目的

劣駆動システム



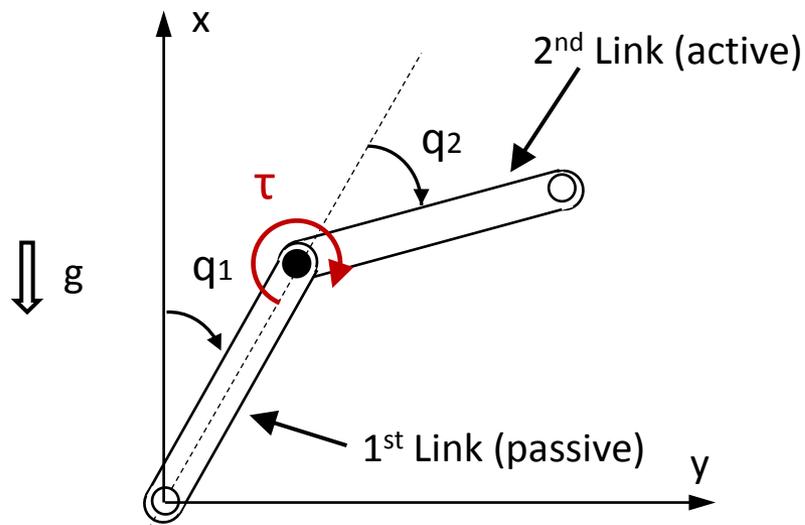
## Acrobot

非線形性の強い劣駆動不安定システム  
非線形制御則の実証装置

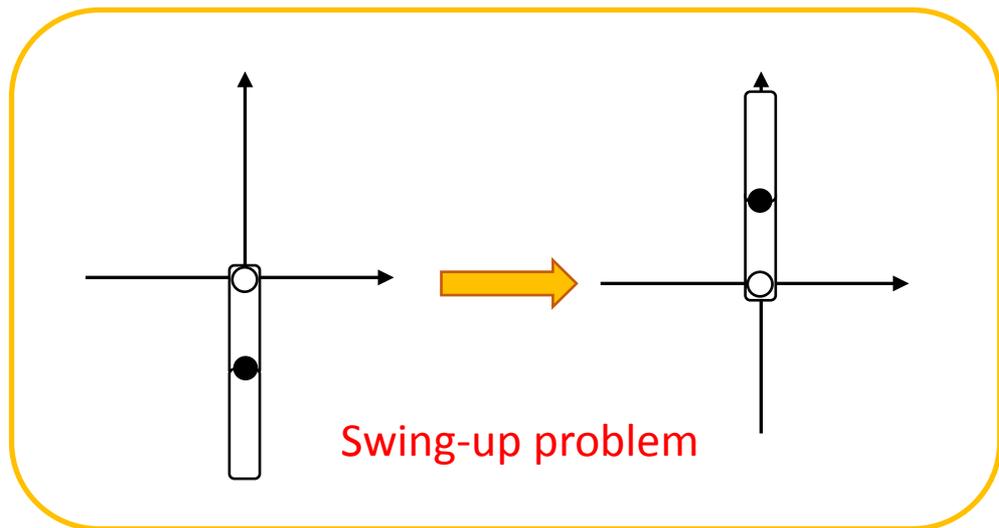


Acrobotの振り上げ安定化制御

# Acrobotシステム



$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in \mathbb{R}^4, u \in \mathbb{R}^1$$



# 発表の流れ

---

- ・背景と目的

  - 劣駆動システムとAcrobot

- ・先行研究

  - Acrobotの振り上げ安定化

- ・提案手法の適用

  - 安定多様体法による制御器設計

  - Acrobotへの適用

- ・シミュレーション結果

- ・おわりに

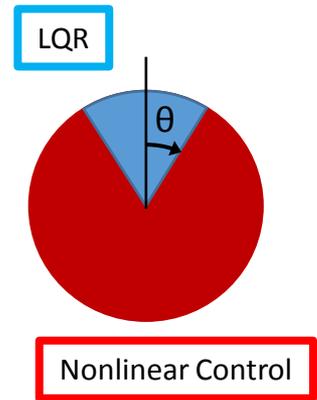


# 先行研究

## ・振り上げ制御＋平衡点近傍での安定化

エネルギーフィードバック\*, 部分フィードバック線形化, ...etc

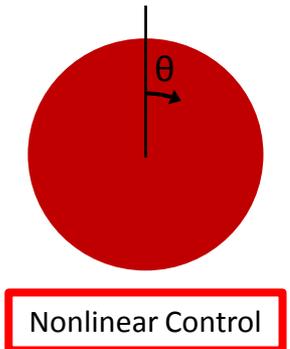
問題点: **切り替え時の不安定要素**



## ・単一コントローラによる制御

バックステッピング\*\*, 軌道追従, ...etc

問題点: **システムに依存した複雑な設計**



**非線形最適制御による単一コントローラでの  
Acrobotの振り上げ安定化**

\* Spong, M. W. (1995). The swing up control problem for the acrobot. IEEE ControlSystems Magazine, 15(1), 44–55

\*\* Olfati-Saber, R. (2000). Control of underactuated mechanical systems with twodegrees of freedom and symmetry. In Proceedings of the American controlconference. Chicago, USA (pp. 4092–4096)

# 発表の流れ

---

- ・背景と目的

  - 劣駆動システムとAcrobot

- ・先行研究

  - Acrobotの振り上げ安定化

- ・提案手法の適用

  - 安定多様体法による制御器設計

  - Acrobotへの適用

- ・シミュレーション結果

- ・おわりに



# 非線形最適制御

評価関数  $J$  を最小にするレギュレータ設計問題

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$



動的計画法の適用

Hamilton-Jacobi方程式

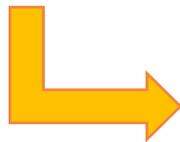
$$H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{4} p^T g(x) R^{-1} g(x)^T p + x^T Q x = 0$$



線形システムの場合

代数Riccati方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$



線形最適入力  $u = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T P x$



# 安定多様体法による求解の流れ

Hamilton-Jacobi方程式

$$H(x, p) = p^\top f(x) - \frac{1}{4} p^\top g(x) R^{-1} g(x)^\top p + x^\top Q x = 0$$

Hamilton正準方程式

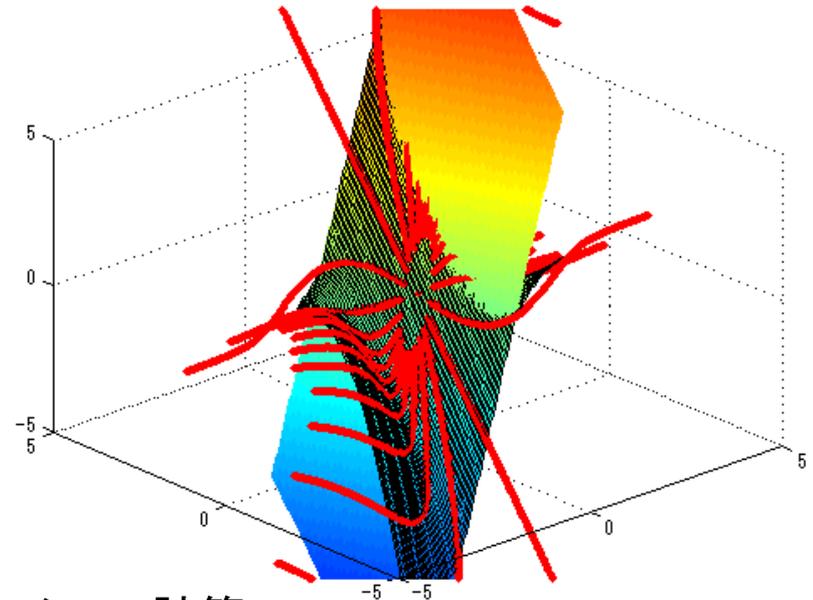
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p) \end{cases}$$

ブロック対角化

積分漸化式

安定多様体法を用いたイタレーション計算

$$p(x) = \frac{\partial V(x)^\top}{\partial x}$$



非線形最適入力

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^\top \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

# 安定多様体法

Hamilton正準方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p} = f(x) - \frac{1}{2} g(x) R^{-1} g(x)^T p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} p + \frac{\partial}{\partial x} (p(x)^T g(x) R^{-1} g(x)^T p(x))^T - \frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

線形部分と非線形部分に分離し、ブロック対角化  $\begin{bmatrix} x' \\ p' \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax' + f(t, x', p') \\ \dot{p}' = -A^T p' + g(t, x', p') \end{cases}$$

安定行列を持つ $x'$ と  
不安定行列を持つ $p'$ に分離

安定多様体法\*

$$\begin{cases} x'_{k+1} = e^{At} \xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x'_k(s), p'_k(s)) ds \\ p'_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x'_k(s), p'_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At} \xi \\ p_0 = 0 \end{cases}$$

$k \rightarrow \infty$ とすれば、この漸化式は正準方程式の解に収束

# 発表の流れ

---

- ・背景と目的

  - 劣駆動システムとAcrobot

- ・先行研究

  - Acrobotの振り上げ安定化

- ・提案手法の適用

  - 安定多様体法による制御器設計

  - Acrobotへの適用

- ・シミュレーション結果

- ・おわりに

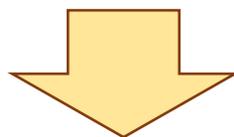


# パラメータ推定

※推定パラメータは  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \mu_1, \mu_2, f_1, f_2$  の9個

Acrobot運動方程式

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (a_2 + a_3 \cos q_2) \ddot{q}_2 + a_3 (-2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \sin q_2 \\ \quad - b_1 \sin q_1 - b_2 \sin(q_1 + q_2) = -\mu_1 \dot{q}_1 - f_1 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ (a_2 + a_3 \cos q_2) \ddot{q}_1 + a_2 \ddot{q}_2 + a_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2 - b_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \quad = nK_{DC}V - \mu_2 \dot{q}_2 - f_2 \text{sign}(\dot{q}_2) \end{cases}$$



第2式を変換

$$[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad \ddot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 \quad -\sin(q_1 + q_2) \quad \dot{q}_2 \quad \text{sign}(\dot{q}_2)] \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ \mu_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = nK_{DC}V$$

両辺をフィルタリング

$$A(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta = Y(V) \implies F(s)A(s, q)\Theta = F(s)Y(V)$$

最小二乗推定値

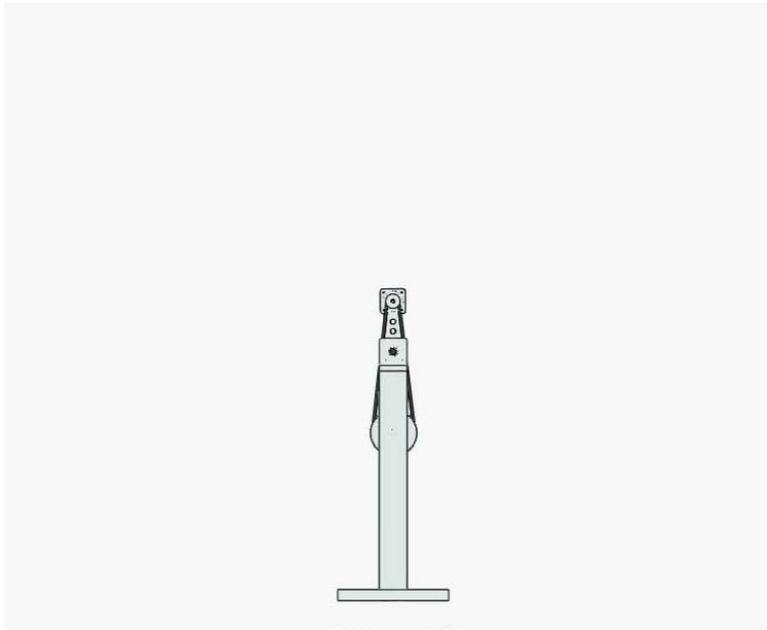
$$\implies \Theta = (F(s)A(s, q))^+ F(s)Y(V)$$

# Acrobotへの適用

安定多様体法によって計算されたHamilton-Jacobi方程式の解軌道

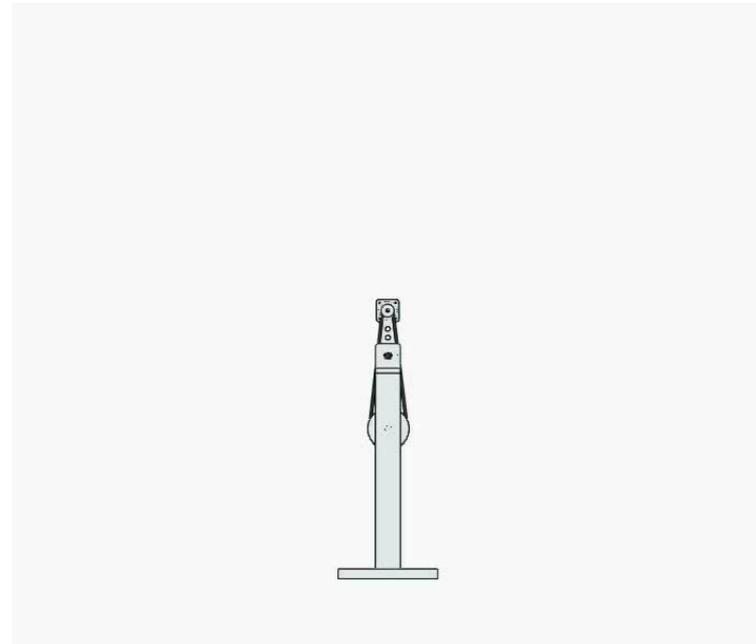
$$Q = \text{diag}(0.1, 10, 0.05, 10)$$

$$R = 1000$$



$$Q = \text{diag}(0.1, 10, 0.05, 10)$$

$$R = 100$$

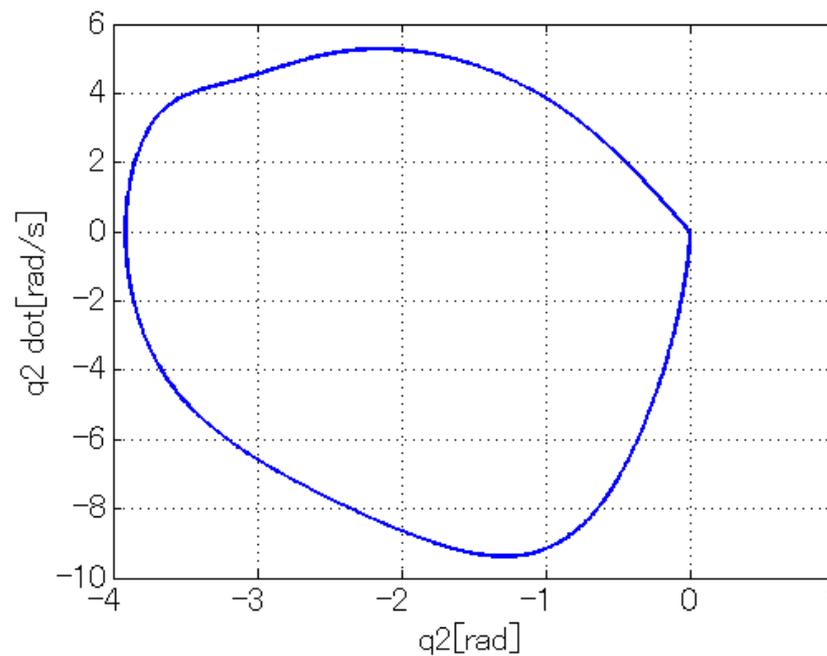
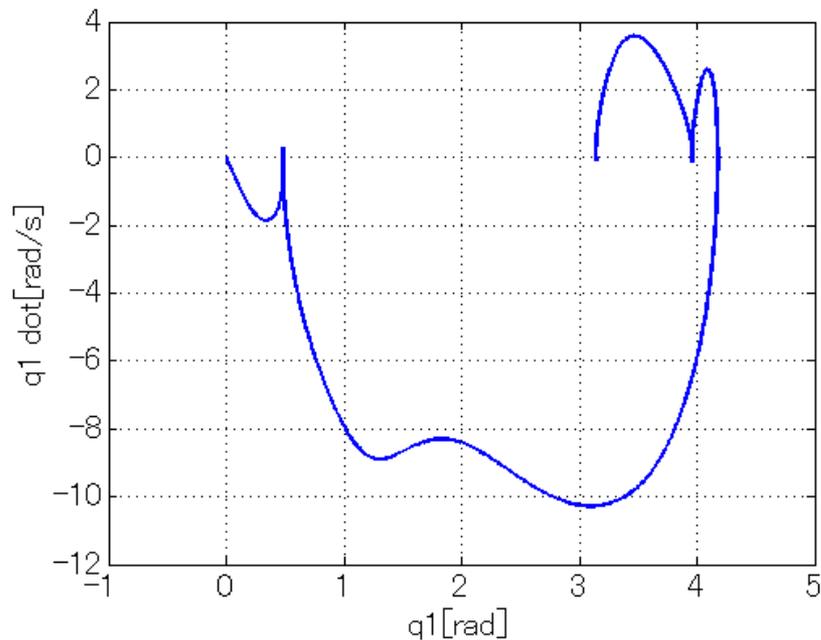


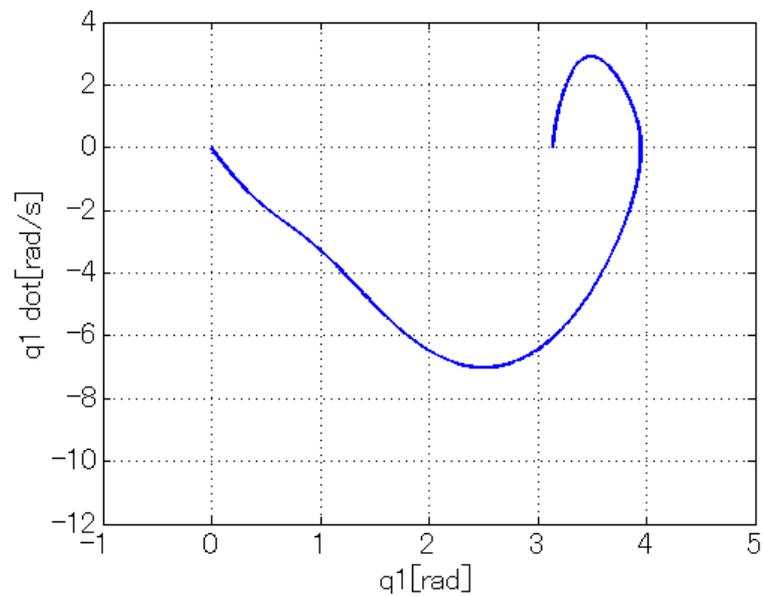
# Acrobotへの適用

安定多様体法によって計算されたHami

$$Q = \text{diag}(0.01, 1, 0.005, 1)$$

$$R = 100$$

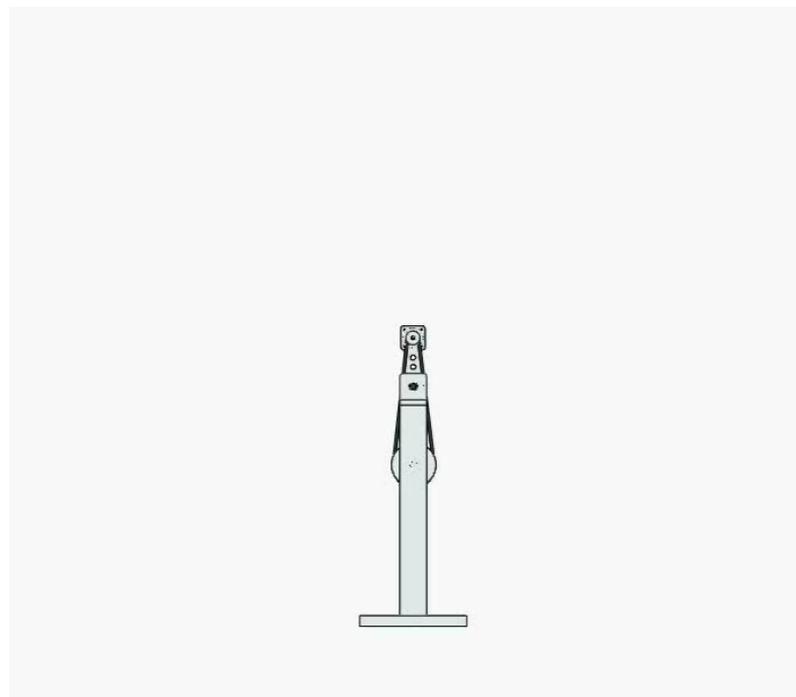
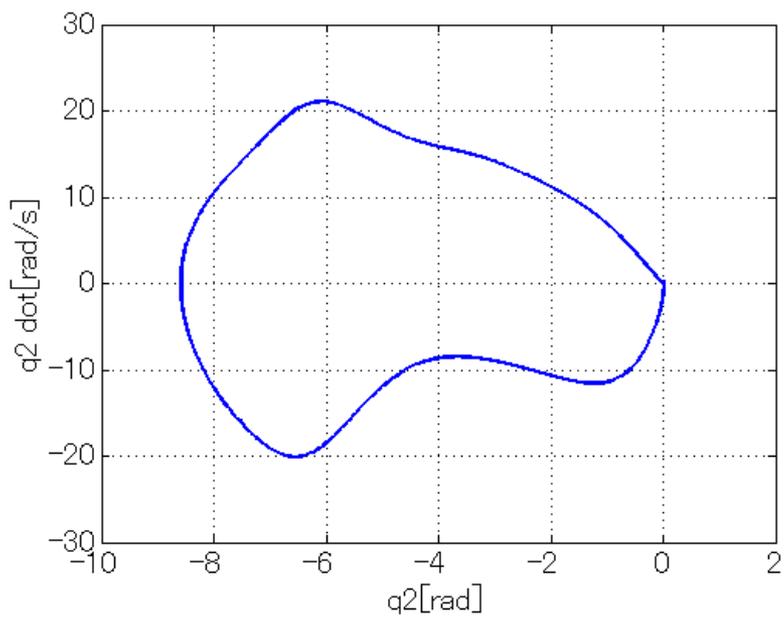




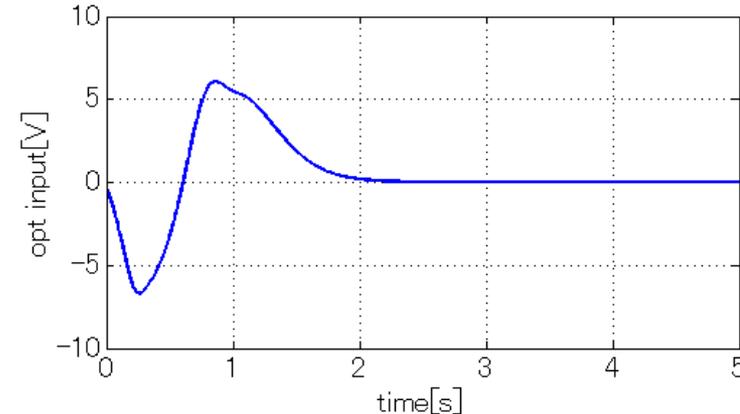
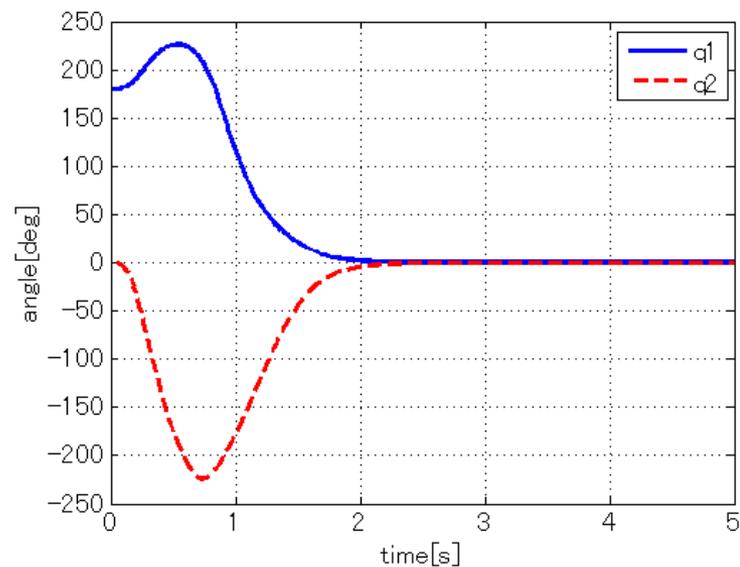
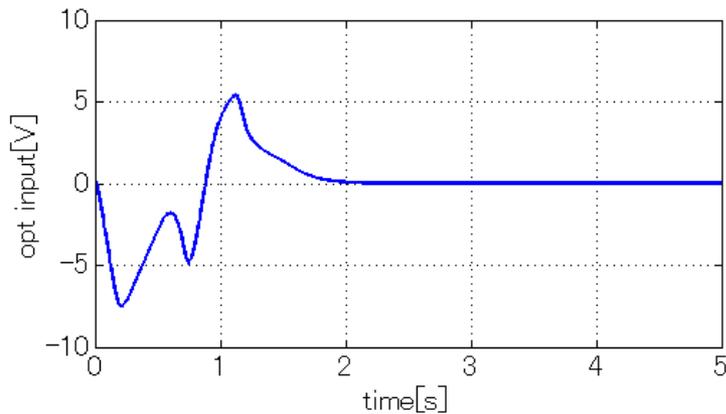
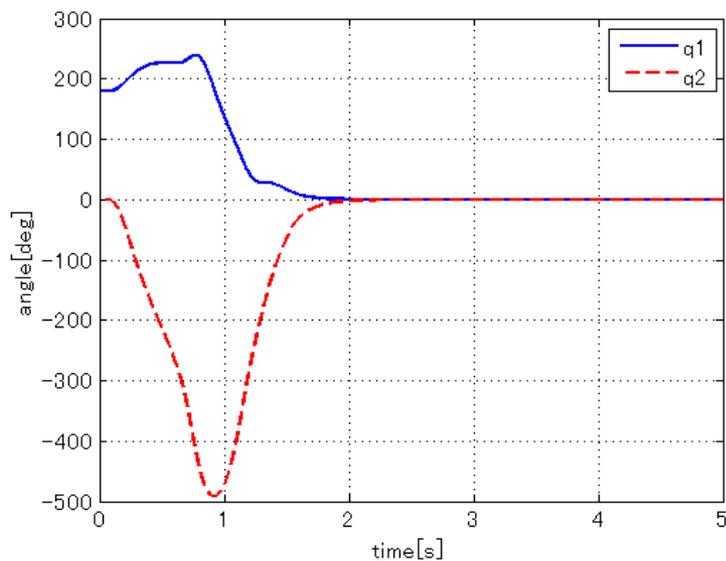
Hamilton-Jacobi方程式の解軌道

$$Q = \text{diag}(0.1, 10, 0.05, 10)$$

$$R = 100$$



# Acrobotへの適用



この解軌道に対し、  
フィードバックコントローラを設計する

# コントローラ設計

安定多様体法による数値解  $x(t), p(t)$

$$p(x) = C_{pol}Z(x)$$



多項式近似

$$C_{pol} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots \end{bmatrix},$$

フィードバック形式に変換  $p = p(x)$

$$Z(x) = [x_1 \quad x_1x_2 \quad x_1^2x_2 \quad \cdots]^T.$$

非線形最適入力  $u = -\frac{1}{2}R^{-1}g(x)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x}$

計算された数値データ解  $x(t), p(t)$ に合うように  
最小二乗法を用いて係数フィッティングを行う

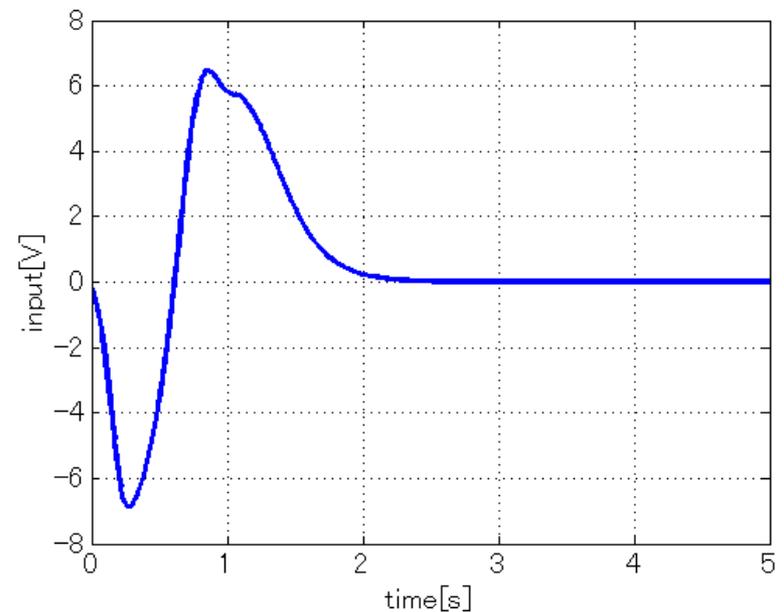
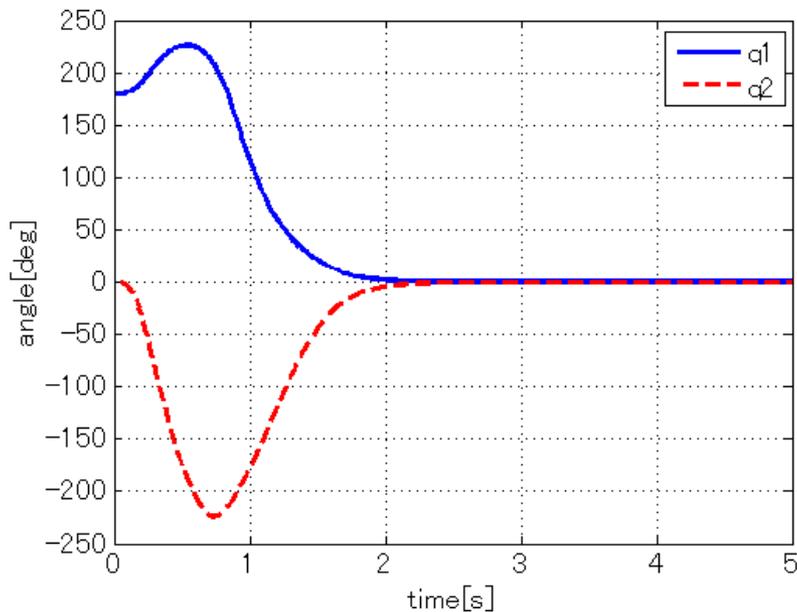
$$C_{pol} = YX^T(XX^T)^{-1} \quad Y = \begin{bmatrix} p(t)_1 \\ \vdots \\ p(t)_d \\ \vdots \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} z(x(t))_1^T \\ \vdots \\ z(x(t))_d^T \\ \vdots \end{bmatrix}$$

# シミュレーション結果(1)

多項式近似

$q_1, q_2$ : 3次,  $\dot{q}_1$ : 5次,  $\dot{q}_2$ : 7次,

多項式近似によるフィードバックコントローラを用いたシミュレーション



角度は $q_1, q_2$ ともに原点へ収束  
入力も安定

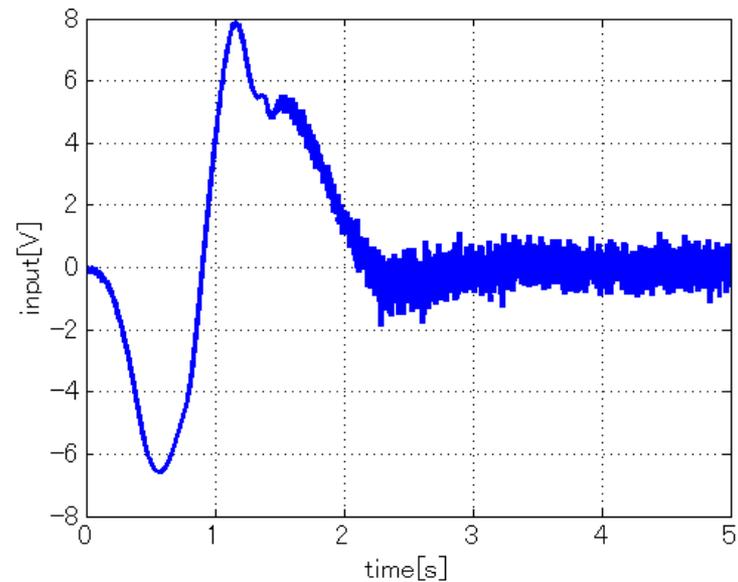
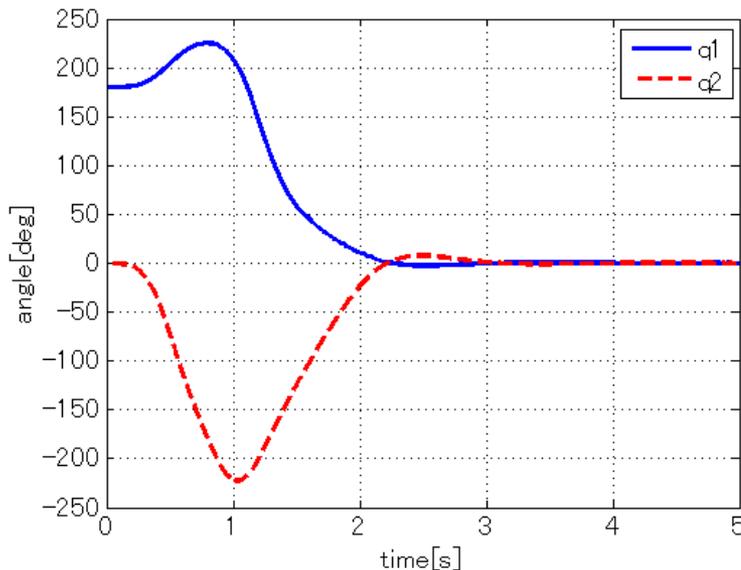
# シミュレーション結果(1)

多項式近似

$q_1, q_2$ : 3次,  $\dot{q}_1$ : 5次,  $\dot{q}_2$ : 7次,

多項式近似によるフィードバックコントローラを用いたシミュレーション

パラメータ誤差 ( $m_1, m_2$  に対し +10%), 観測ノイズ



本来の軌道からずれた際も  
システムを安定化する入力を印加していることが分かる



ロバスト性の確認

# おわりに

## ・Acrobotの振り上げ安定化制御

既存手法: 振り上げと安定化の制御側を使い分けるハイブリッド制御



安定多様体法を用いた**単一コントローラ**による  
非線形最適振り上げ安定化

- ・Hamilton-Jacobi方程式を解くという明確な設計手法
- ・複雑な非線形システムに対する**最適性**の導入

## ・設計コントローラ

シミュレーションによって**ロバスト性**を確認

## ・今後の課題

実機実験による制御器性能の確認

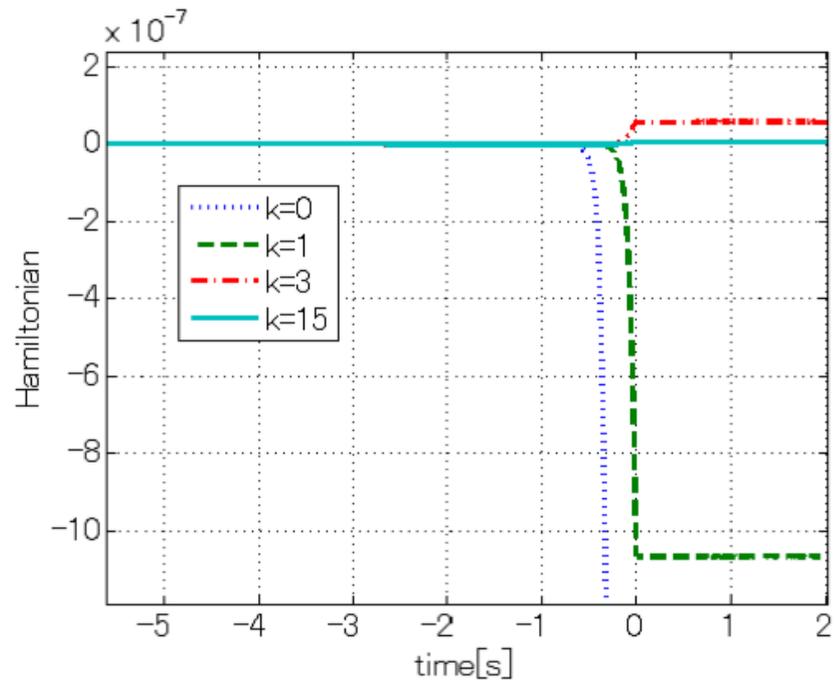
# 計算精度

Hamilton-Jacobi方程式

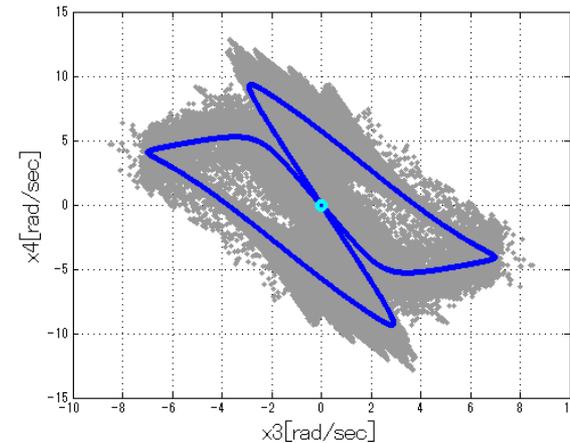
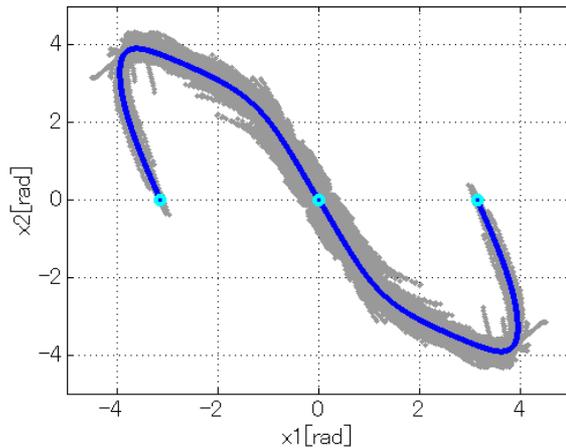
$$H(x, p) = p^\top f(x) - \frac{1}{4} p^\top g(x) R^{-1} g(x)^\top p + x^\top Q x = 0$$

ハミルトニアン値によって  
解の精度を確認できる

イタレーション回数  $k=15$  として  
制御器設計を行う



# ロバスト設計



基準軌道(青)に対し, その近傍を包括するように(灰色)数値解を計算する.



基準軌道からずれた際にもシステムが安定となるような入力を与えられる



ロバスト性の向上

