

## サンプルテキスト

# FEM原理講座

## サンプルテキストについて

- 各講師が「講義の内容が伝わりやすいページ」を選びました。
- テキストのページは必ずしも連続していません。一部を抜粋しています。
- 幾何光学講座については、実物のテキストではなくガイダンスを掲載いたします。

### 固体・構造のFEM

対象とする構造系 (物理モデル)	
連続体・固体 (弾性体/弾塑性体/粘弾性体/...)	構造 (ばね/骨組み/板・シェル)
構造物の境界値問題を定義する支配方程式 (数値モデル)	
連立偏微分方程式 平衡方程式 (運動方程式) / 変位-ひずみ関係式 / 応力-ひずみ関係式 / 変位境界条件 / 荷重境界条件 / 初期条件	剛性方程式 一般化力と変位関係 / 支持条件 / 荷重条件
離散化解析手法	マトリックス構造解析法
古典的近似解法 重み付き残差法 (選点法 / モーメント法 / Galerkin法) Ritz法	<ul style="list-style-type: none"> <li>・構造力学</li> <li>・行列計算</li> </ul>
有限要素法 (Finite Element Method: FEM) 弱形式 (大域形) / 要素単位の離散化 仮想仕事の原理 / 変分法 / エネルギー原理 差分法 (Finite Difference Method: FDM) 強形式 (局所形) / 格子点周りの離散化 境界要素法 (Boundary Element Method: BEM) 境界積分方程式 / Green関数の利用	
要素 (部材) ごとの剛性方程式から全体系の剛性方程式へ	

### マトリックス構造解析手法とFEM

マトリックス構造解析法

【構造力学】

- ・解析対象を元々離散的な構造系としてモデル化

有限要素法 (FEM)

- ・解析対象の数値モデル化
- ・空間の離散化

【固体力学】

- ・支配方程式の離散化

↓

共通

- ・部材 (要素) ごとの剛性方程式
- ・全体系の剛性方程式
- ・求解 (連立一次方程式を解く)
- ・後処理 (部材 (要素) に働く力や変形などを算定)

### 応力のつり合い式

x 方向の力のつり合い:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dx + \bar{b}_x dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{b}_x = 0$$

y 方向の力のつり合い:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{b}_y = 0$$

応力  $\sigma$ : [力/面積] = [F/L<sup>2</sup>]  
物体力  $\bar{b}$ : [力/体積] = [F/L<sup>3</sup>]

OR

$$\partial^T \sigma + \bar{b} = 0 \quad \text{ここで } \partial^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

### 弱形式：大域形の支配方程式

強形式

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + c(x)u(x) = b(x) \text{ in } (0, l)$$

$$u(0) = \delta_0$$

$$a \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = \bar{T}$$

↓

弱形式 (仮想仕事式)

$$\int_0^l a(x) \frac{du^*(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx + \int_0^l c(x)u^*(x)u(x) dx = \int_0^l b(x)u^*(x) dx + u^*(l)\bar{T}$$

$$u(0) = \delta_0 \quad \text{and} \quad \forall u^*; u^*(0) = 0$$

Young 率: E  
断面積: A(x)  
分布外力 (物体力): b(x)=A(x)B  
分布外力 (外力): T

$$\begin{cases} \int_0^l \frac{dv_h(x)}{dx} \frac{du_h(x)}{dx} dx + \int_0^l v_h(x) u_h(x) dx = v_h(l) \bar{T} \\ u_h(0) = \delta_0 \text{ and } \forall v_h; v_h(0) = 0 \end{cases}$$

↓ 離散化

$$u(x) \approx u_h(x) = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = N(x)U$$

$$v(x) \approx v_h(x) = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} = N(x)V$$

形式的には Galerkin 法

$$KU = F \quad K = \int_0^l \frac{dN^T}{dx} a \frac{dN}{dx} dx + \int_0^l N^T c N dx$$

剛性方程式

$$F = \int_0^l N^T (b - \delta_0 c) dx + N^T(l) \bar{T}$$

**支配方程式の離散化**  
 ~無限次元から有限次元へ~

- 無限次元の問題における支配方程式（仮想仕事式=弱形式）
 
$$\begin{cases} \int_0^l a(x) \frac{du^*(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx + \int_0^l c(x) u^*(x) u(x) dx = \int_0^l b(x) u^*(x) dx + u^*(l) \bar{T} \\ u(0) = \delta_0 \text{ and } \forall u^*; u^*(0) = 0 \end{cases}$$
- 各点  $x$  での変数が未知（未知数=自由度が無限個）
- 有限次元の問題に変換【離散化】
  - 事前に、既知の関数の重ね合わせとして未知数の関数形を仮定する

$$u(x) \approx \{ \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \dots \quad \phi_n(x) \} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \alpha_i$$

基底関数 (basis function)      未知パラメータ      無限次元の問題における支配方程式に代入

↓ 離散化

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

- 基底関数の組は一次独立
- 基底関数に乗ずるパラメータが未知（未知数=自由度が有限個）

離散化方程式

**要素  $e$  の形状関数**

変位関数を  $u(x) \approx u_h(x) = a + bx = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix}$  と仮定（近似）する。

各節点上で、変位値を取るよう要請すれば、

$$u_h(x_1^e) = u_1^e = a + bx_1^e = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1^e \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$u_h(x_2^e) = u_2^e = a + bx_2^e = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \quad (h_e = x_2^e - x_1^e)$$

この係数をもとの仮定した変位(≠)に戻せば、

$$u(x) \approx u_h(x) = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^e(x) & N_2^e(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = N_e d_e$$

のように新たに未知変数を節点変位として近似関数を定義できる。  
 ここで、 $N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h_e}$ 、 $N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h_e}$  が「**形状関数**」(shape function) となる

**要素における節点の番号付けと形状関数**

$$\begin{cases} N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h_e} \\ N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h_e} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} (1) N_\alpha^e(x_\beta^e) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \\ (2) \sum_{\alpha=1}^2 N_\alpha^e(x) = 1 \end{cases}$$

### 形状関数による変位の補間近似とひずみ・応力の近似

形状関数を用いた変位の補間近似

$$u(x) \approx u_h(x) = \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} x_2^e - x & x - x_1^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$= N_e d_e = \begin{Bmatrix} N_1^e(x) & N_2^e(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_h = \frac{dN_e}{dx} d_e = \frac{1}{h_e} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{u_2^e - u_1^e}{h_e}$$

$$\sigma_h = E\varepsilon = E \frac{u_2^e - u_1^e}{h_e}$$

Note:  
形状関数≒補間関数=内挿関数 (interpolation function)

### 要素による領域分割

Young 率:  $E$   
断面積:  $A(x)$   
 $a(x) = A(x)E$

分布バネ  $c(x)$   
分布外力 (物体力)  $b(x) = A(x)B$

簡単のため要素は左から順に番号付け

(全体) 節点座標:  $x_1=0, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$

(等価) 節点力:  $P_1^e, P_2^e$   
節点変位:  $u(x_1^e) = u_1^e, u(x_2^e) = u_2^e$   
要素番号:  $e$   
節点

### “要素”についての方程式

$$\int_0^l a \frac{dv_h}{dx} \frac{du_h}{dx} dx + \int_0^l cv_h u_h dx = \int_0^l v_h b dx + v_h(l)\bar{T} \quad \forall v_h(x) \text{ with } v_h(0) = 0$$

要素  $e$  ( $e=1, \dots, n$ ) について成り立つ弱形式 (仮想仕事式)

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{dv_h}{dx} \frac{du_h}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} cv_h u_h dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} v_h b dx + v_h(x_1^e)P_1^e + v_h(x_2^e)P_2^e$$

if  $x_1^e = 0$  (i.e.,  $e=1$ )  $\Rightarrow u_1^e = 0$   
if  $x_2^e = l$  (i.e.,  $e=n$ )  $\Rightarrow P_2^e = \bar{T}$

Note:

$$\int_0^l a \frac{dv_h}{dx} \frac{du_h}{dx} dx = \sum_{e=1}^n \int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{dv_h}{dx} \frac{du_h}{dx} dx$$

### 形状関数を用いた変位の近似関数を仮想仕事式に代入

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{dv_h}{dx} \frac{du_h}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} cv_h u_h dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} v_h b dx + v_h(x_1^e)P_1^e + v_h(x_2^e)P_2^e$$

代入して、  
 $u_h(x) = N_e d_e$  and  $v_h(x) = N_e \delta d_e$   
where  $N_e = \begin{Bmatrix} N_1^e(x) & N_2^e(x) \end{Bmatrix}$ ,  $d_e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$ ,  $\delta d_e = \begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \end{Bmatrix}$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \frac{d(N_e \delta d_e)}{dx} \frac{d(N_e d_e)}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} c(N_e \delta d_e)^T (N_e d_e) dx$$

$$= \int_{x_1^e}^{x_2^e} (N_e \delta d_e)^T b dx + N_e(x_1^e) \delta d_e^T P_1^e + N_e(x_2^e) \delta d_e^T P_2^e$$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a \left[ \frac{d(N_e \delta d_e)}{dx} \right]^T \frac{d(N_e d_e)}{dx} dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} c(N_e \delta d_e)^T (N_e d_e) dx$$

$$= \int_{x_1^e}^{x_2^e} (N_e \delta d_e)^T b dx + (N_e(x_1^e) \delta d_e^T)^T P_1^e + (N_e(x_2^e) \delta d_e^T)^T P_2^e$$



3要素で分割 (分布ばねを無視) する場合

$$\frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{b_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} \quad (K_e d_e = F_e)$$

element(1):  $\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

element(2):  $\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_2^{(2)} \\ P_1^{(2)} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

element(3):  $\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^{(3)} \\ u_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_2^{(3)} \\ P_1^{(3)} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$

組み立て ⇒ 全体剛性方程式 (アセンブリング)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

全体剛性行列      全体荷重ベクトル

節点荷重・荷重境界条件・変位境界条件の反映

$$\begin{matrix} P_1^{(1)} : \text{reaction (unknown)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} = 0 \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} = 0 \\ P_2^{(3)} = \bar{T} \end{matrix} \Rightarrow \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{T} \end{Bmatrix}$$

拘束条件 (変位境界条件:  $u(0) = \delta_0$ ) を考慮して, 方程式を縮約

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ 0 \\ \bar{T} \end{Bmatrix}$$

特異      正則

$$(Kd = F \Rightarrow K^R d^R = F^R) \Rightarrow \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{T} \end{Bmatrix} - \frac{EA}{h} \begin{Bmatrix} -\delta_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

縮約された剛性方程式

線形弾性体のFEM (メインルーチン/ソルバー)

- 解析データ (FEMモデル) の読み込み
- 全体剛性方程式の組み立て

全要素についてループ

$$K_e d_e = F_e : \text{要素剛性方程式}$$

$$K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T D B_e d\Omega$$

$$F_e = \int_{\Omega_e} N_e^T b d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} N_e^T T d\Gamma$$

$$Kd = F : \text{全体剛性方程式の組み立て}$$

- 剛性方程式を解いて節点変位  $d$  を求める
- 後処理 (ポストプロセス) : 応力・ひずみの算定

$$d_e \Rightarrow \varepsilon \approx \partial N_e d_e = B_e d_e$$

$$\Rightarrow \sigma = D\varepsilon \approx DB_e d_e$$

要素に関する仮想仕事式 (弱形式)

$$\int_{\partial\Omega_e} \delta u^T t_e h_e ds = \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega_e^l} \delta u^T t_e^l h_e ds$$

(A)  $\int_{\Omega_e} (\partial \delta u)^T D \partial u h_e dA = \int_{\Omega_e} \delta u^T \bar{b} h_e dA + \int_{\partial\Omega_e} \delta u^T t_e h_e ds \forall \delta u$

(B)  $\int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \partial \delta u \\ \partial x & \partial y & \partial x & \partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u \\ \partial x \\ \partial y \\ \partial v \\ \partial x & \partial y \end{bmatrix} h_e dA$

$$= \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \delta u & \delta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \end{bmatrix} h_e dA + \int_{\partial\Omega_e} \begin{bmatrix} \delta u & \delta v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ t_x \\ t_y \end{bmatrix} h_e ds \forall \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{bmatrix}$$

ただし、要素の  $z$  方向の厚さを  $h_e$  として  $dV = h_e dA$  and  $dS = h_e ds$  とおいた。