



## CGのための数学的手法と発想

オー・エル・エム・デジタル

安生健一

### 概要

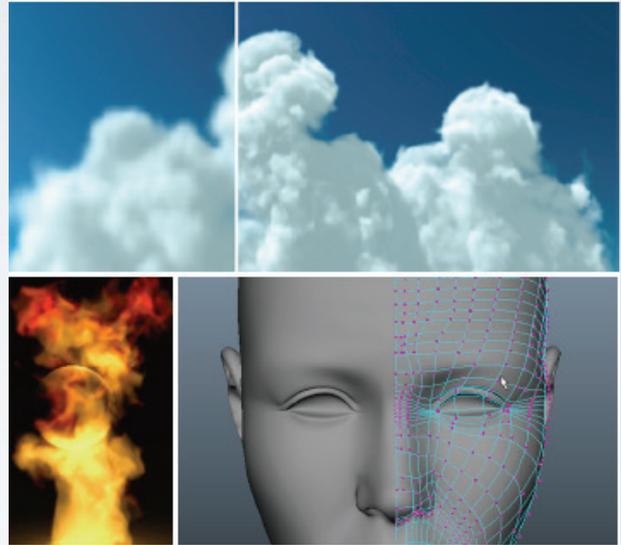
何がCGに望まれているか？

CGで使われる数学的手法

CGと数学のコラボレーション

数学的発想とは？

CGに何が  
望まれているか？



## CGはVFXだけではない

- ・ 多様化する応用分野
  - ・ 80年代～ フライトシミュレータ、CAD、アニメ自動中割り
  - ・ 90年代～ エンターテイメント主導（映画、ゲーム）
  - ・ 今世紀～ GPUの発展 / Webコンテンツ、産業応用
    - ・ ビジュアライゼーション(科学技術計算結果の可視化)技術の発展
    - ・ GPGPU
    - ・ スマホ、3次元地図、3Dプリンティング

# CGに望まれること

- ・ 可視化
  - ・ 科学的に正しい可視化（産業界）
  - ・ 色々な情報から必要な情報を見やすくしてくれる(ビッグデータ)
  - ・ 本物らしさ、を可視化する
- ・ 「本物らしさ」や「非現実」の可視化はエンターテイメントだけだろうか？

CGで使われる  
数学的手法



# CG技術: シミュレーション技術

- レンダリング方程式

- 光と影のシミュレーション

$$L(x, \theta) = L_e(x, \theta) + \int L(x, \phi) \rho(x, \theta, \phi) d\omega$$

- 自然現象を表わす微分方程式

- Ex. 流体なら Navier-Stokes 方程式:

- 流体、雲、爆発...

- Ex. 剛体アニメーション、柔軟物体の変形

# CG技術: メッシュ編集

- Least squares meshes  
(Sorkine et al. 2004)
- Laplacian mesh optimization  
(Nealen et al. 2006)
- Poisson-based gradient  
field (Yu et al. 2004)

# 表情

- アニメータのセンスと技術
  - FACS (Facial Action Coding System)
  - ブレンドシェープ (Blendshape)
  - 筋肉ベースモデル

# 動作

- アニメータのセンスと技術
  - モーションキャプチャー
  - データベース
  - 物理シミュレーションの援用

# 自然現象のリアリティ

物理ベースの方程式を解く

実写のデータベースの活用

# 本物らしさ

物理ベースの方程式を解く

実写のデータベース

組み合わせる

# 光と影

- リアリティの追求
  - レンダリング方程式
- 非写実的表現
  - Toon shading

早く 上手に 意のままに

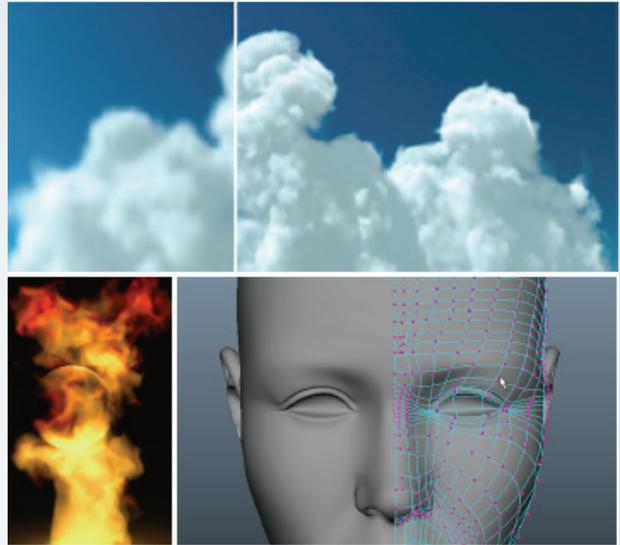
Computing power

GPU

Big DB

User Interface/ *Directability*

# CGと数学の コラボレーション



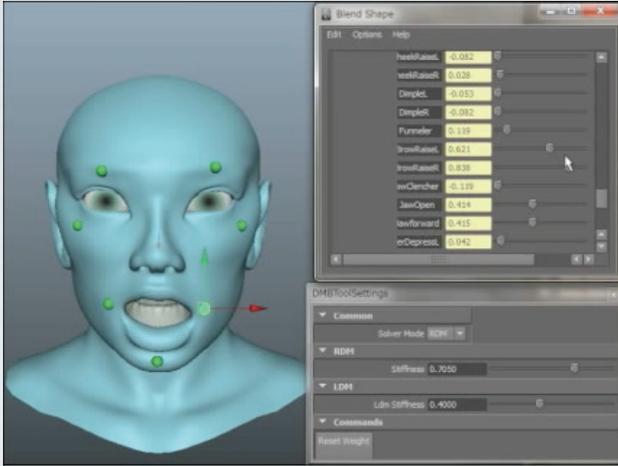
## 数学CREST: プロジェクト概要

「デジタル映像数学の構築と表現技術の革新」

<http://mcg.imi.kyushu-u.ac.jp/>

- CG固有の問題を数学的に解く
  - 人間やキャラクタ、および流体现象の演出的アニメーション作成のための数学モデル
  - 効率とリアリティ(およびその両方) に貢献する
- より一般的な表示対象への展開

# A. 効率的な表情編集



- ブレンドシェープ法による表情生成
- 数十～数百におよぶスライダー操作からの脱却
- データベースの“学習”を取り入れた更なる効率化



MATH FOR CG

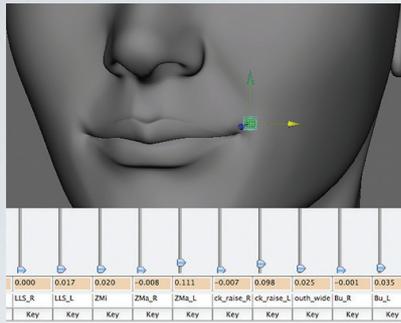
## ブレンドシェープ : Formulation

- 顔は、ポリゴンモデルとする。
- 顔のポリゴンを形成する頂点列  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$  を1列に並べた(縦)ベクトル  $\mathbf{f}$  を考える。
- 一般的な顔  $\mathbf{f}$  は neutral face を  $\mathbf{f}_0$  と記し、行列  $\mathbf{B}$  は target face  $\mathbf{f}_i$  と  $\mathbf{f}_0$  の差  $(\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_0)$  を並べて作る ( $1 \leq i \leq m$ ):

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}\mathbf{w} + \mathbf{f}_0$$

- これにより  $0 \leq \mathbf{w} \leq 1.0$  の範囲で顔のバリエーションを作る。重み係数をスライダー操作で変化させる。
  - $\mathbf{w}$  は各キーフレーム(keyframe)での設定をアニメーターが行い、後はコンピュータにより自動補間される

# ブレンドシェープ: 利点と欠点



- 単純な仕組み、直感的
  - スライダーバーを動かしてwを調整する
  - 微調整には向いている
- [問題] ポーズが増えると操作が膨大な手間になる
  - 映画「アバター」では主人公に2000個以上の target shapeを制作: 一人を作るのに 2.5年



## [解決策] Direct Manipulation Blendshapes

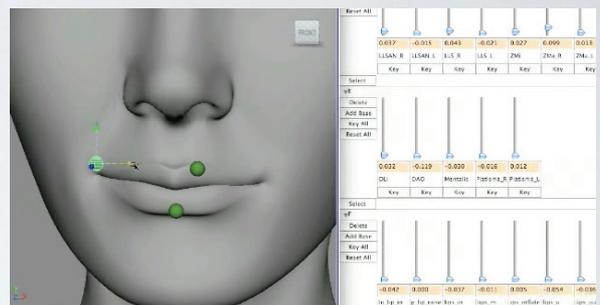
Lewis, Anjyo *IEEE CG&A 2010*; Anjyo et al. *Journal of Graphics Tools 2012*

- 顔モデルへの直接(編集)操作からwを割り出す
  - 直接操作とスライダー調整という2つの編集モードで表情を編集できる

## Direct Manipulation Blendshapes

- [解法] 次の最適化問題を解く:

$$\min_{\Delta w} \left\{ \left\| \overline{B} \Delta w - \overline{\Delta m} \right\|^2 + \alpha \left\| \Delta w \right\|^2 \right\}$$



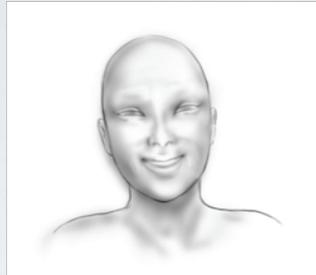
$\overline{\Delta m}$ : 制約(ピン止め)または、移動(ドラッグ)を施した頂点についての変化量.

$\overline{B}$ :  $B$  から上記の操作に対応した頂点列を抜き出した行列

$\Delta w$ : 上記操作にともなう重み係数の変位

## Direct Manipulation Blendshapes

- [評価] 操作性の向上: ラフな「あたり」作成の簡易化



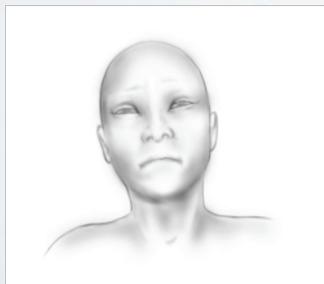
リファレンス画像



DMBによるあたり



スライダーバーでの微調整



Anjyo et al. *Journal of Graphics Tools*, Vol 16 (3) 2012

既存データを使えるときに  
DMB がより効率化を図れないか?



Anjyo et al. *Journal of Graphics Tools*, Vol 16 (3) 2012

## Learned Direct Manipulation

- アニメーションシーケンスの学習: 次の共分散行列の (正固有値の) 固有ベクトルを用いて顔ベクトルを表現する

$$A = E[(\mathbf{x} - \mathbf{e}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{e}_0)^T]$$

$\mathbf{x}$  = 時系列の顔データで  $\mathbf{e}_0$  はその平均(顔).  $A$ は頂点座標総数サイズの正方行列

- 上記の固有ベクトルを並べた行列を  $U$  とし、顔ベクトルをこれら固有ベクトルの線形和で表すときの係数を  $\mathbf{c}$  と置いて、次の最適化問題を解く:

$$\min_{\Delta \mathbf{c}} \left\{ \left\| \overline{U} \Delta \mathbf{c} - \overline{\Delta \mathbf{m}} \right\|^2 + \beta \left\| \Delta \mathbf{c} \right\|_A^2 \right\}$$

ここで、 $\left\| \mathbf{d} \right\|_A^2 := \sum_{i=1}^p \frac{d_i^2}{\lambda_i}$

- $\mathbf{c}$  と  $\mathbf{w}$  との関係は次式から得られる:

$$U \mathbf{c} + \mathbf{e}_0 = B \mathbf{w} + \mathbf{f}_0$$



Input animation



LDM animation

# DMB手法の展開: Retargeting Facial Animation

Ex. Retargeting Animation:  
ある顔のアニメーションを異なる  
顔のアニメーションに変換する

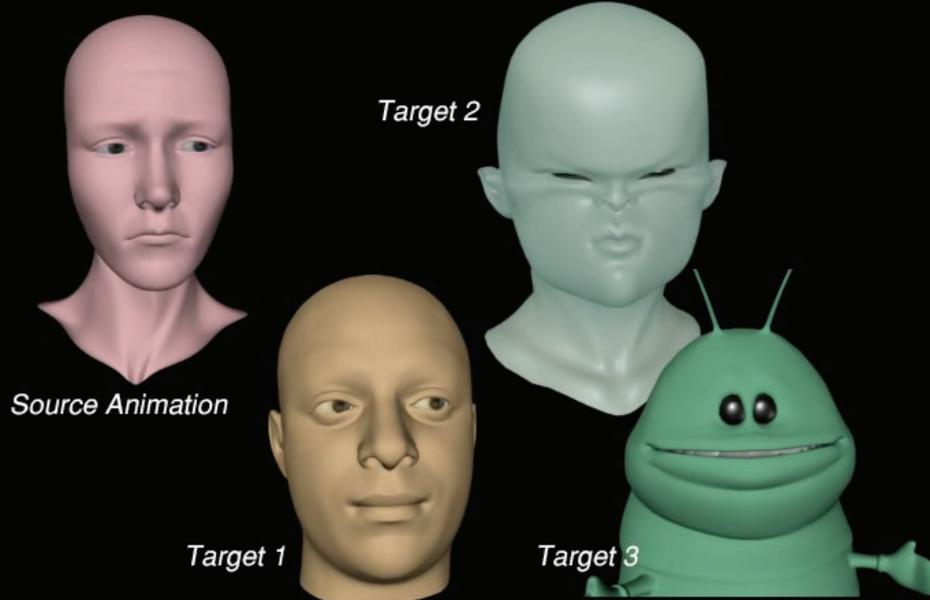


最適化問題: 次を最小にするtargetの点群  
を求める.

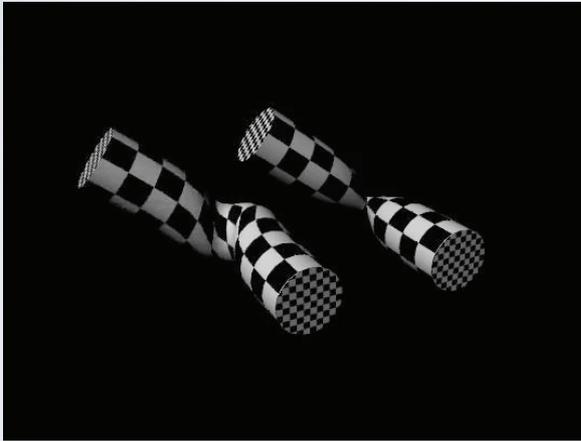
(source - target) の ノルム  
+ (target の正則化項)

Seol et al. *ACM Trans. Graph.* 2012 (SIGGRAPH12にて発表)

[http://vml.kaist.ac.kr/publication/journal/2012Yeongho\\_TOG.html](http://vml.kaist.ac.kr/publication/journal/2012Yeongho_TOG.html)



## B. 局所アフィン写像による変形



- 2次元形状間のモーフィング
- “なるべく”剛体らしい変形 (as-rigid-as-possible deformation) を実現する
- 3次元への拡張と応用

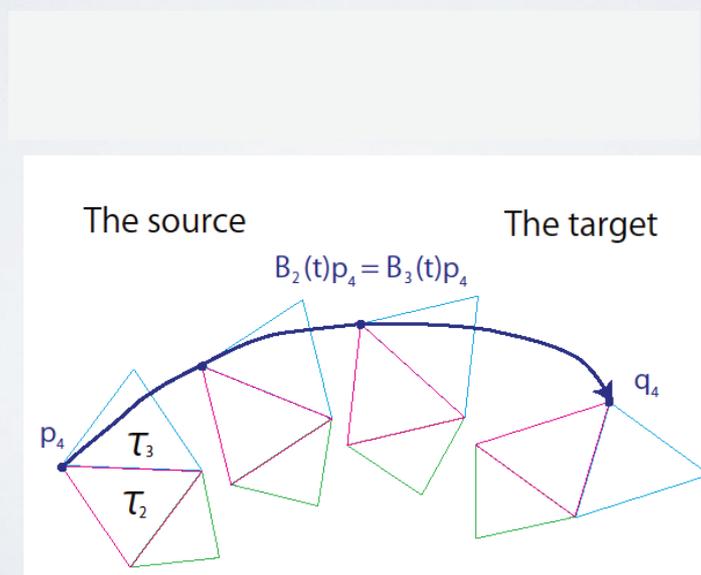


Kaji et al. *ACM/Eurographics Symposium on Computer Animation 2012 (SCA12)*

### As-Rigid-As-Possible Interpolation : Formulation

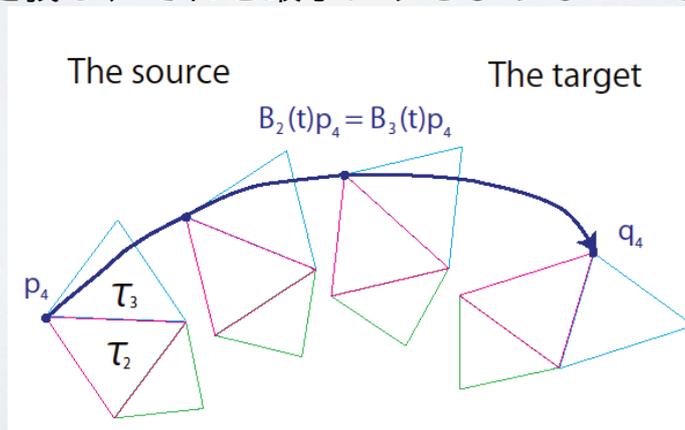
By Alexa et al. SIGGRAPH2000

- 入力: 最初 (source) と最後 (target) の形状データ.
- 出力: source と target 間の補間アニメーション



## As-Rigid-As-Possible Interpolation (ARAP)

- Step 0: Source と target は三角形分割されていて、それら三角形同士の1対1対応はついている (“compatibly triangulated”) とする.
- Step 1: 対応づけられた三角形間のアフィン写像を求める.
- Step 2: すべての三角形ペアのアフィン写像に関するエネルギー関数を定義し、それを最小にするようなパスを求める.



## As-Rigid-As-Possible Interpolation (ARAP)

- A collection of affine maps

$$\mathbf{B}(t) := \{\hat{B}_i(t) \in \text{Aff}(2) \mid i \in \{1, 2, \dots, m\}\}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

- An energy function:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{B}) := \sum_{i=1}^m E_i(A_i(t), B_i(t)) + C(v_1(t), \dots, v_n(t))$$

- $A_i(t)$ : The local homotopy
- $B_i(t)$ : The linear part of  $\hat{B}_i(t)$
- $E_i : \text{GL}^+(2) \times \text{GL}^+(2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  A local error function
- $C : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  A constraint function

## Local homotopy in ARAP

- $\forall \hat{A} \in \text{Aff}(2), \exists!(A, d) \in \text{GL}(2) \times \mathbb{R}^2$  such that

$$\hat{A} : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto Ax + d \in \mathbb{R}^2.$$

- $\text{Aff}(2) \ni \hat{A} \leftrightarrow (A, d) \in \text{GL}(2) \times \mathbb{R}^2.$

- **Polar decomposition:**

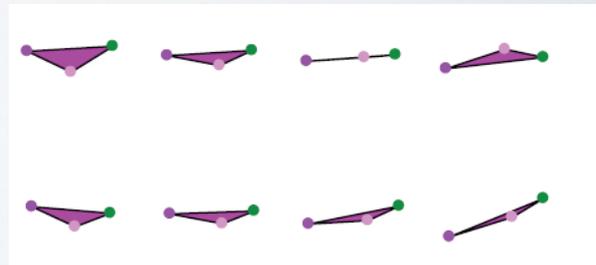
$$A = R_\theta S, R_\theta \in \text{SO}(2), S \in \text{Sym}^+(2)$$

- [Alexa et al., 00]:

$$A^P(t) := R_{t\theta}((1-t)I + tS)$$

$$\det A^P(t) \leq 0 \quad \text{for some } t$$

変形途中で三角形がつぶれたり  
反転する可能性がある



## Local homotopy in ARAP

- **Polar decomposition:**

$$A = R_\theta S, R_\theta \in \text{SO}(2), S \in \text{Sym}^+(2)$$

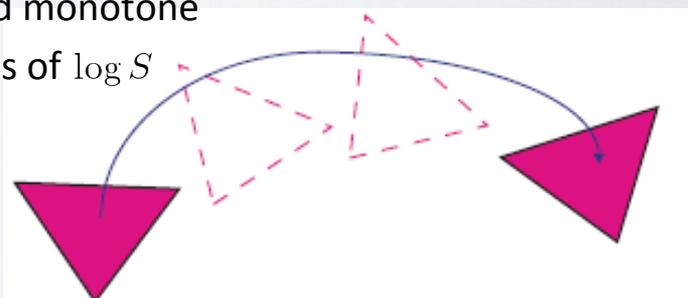
- **Our local homotopy:**

$$A^E(t) := R_{t\theta} \exp(t \log S)$$

$$= R_{t\theta} R_{-\phi} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} R_\phi.$$

- $\det A^E(t) = (\lambda_1 \lambda_2)^t > 0$  and monotone

- **Remark: Well-definedness of  $\log S$**



## Energy Function in ARAP

- [Alexa et al. 00]では、線形写像としての距離をみる:

$$E_i^F(A_i(t), B_i(t)) := \|A_i(t) - B_i(t)\|_F^2$$

- [Igarashi et al. 05]では、対応する2点間の距離を見る:

$$E_i^S(A_i(t), B_i(t)) := \min_{s, \delta \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \tau_i} \|sR_\delta A_i(t)p_k - B_i(t)p_k\|^2$$

## Energy Function in ARAP

- [Alexa et al. 00] 回転に関しては不変でない

$$E_i^F(A_i(t), B_i(t)) := \|A_i(t) - B_i(t)\|_F^2$$

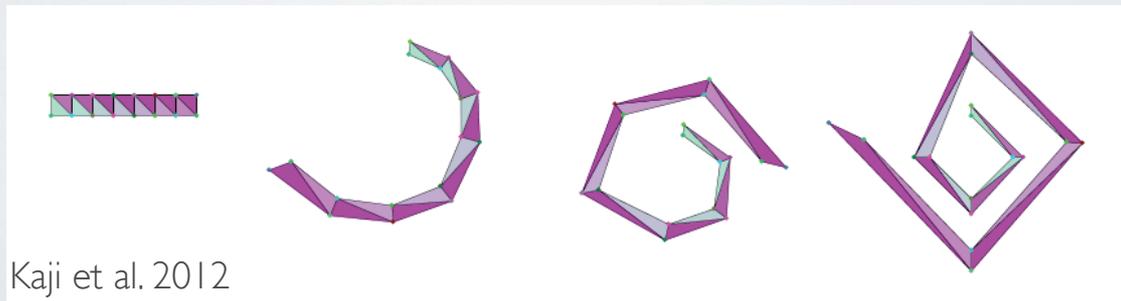
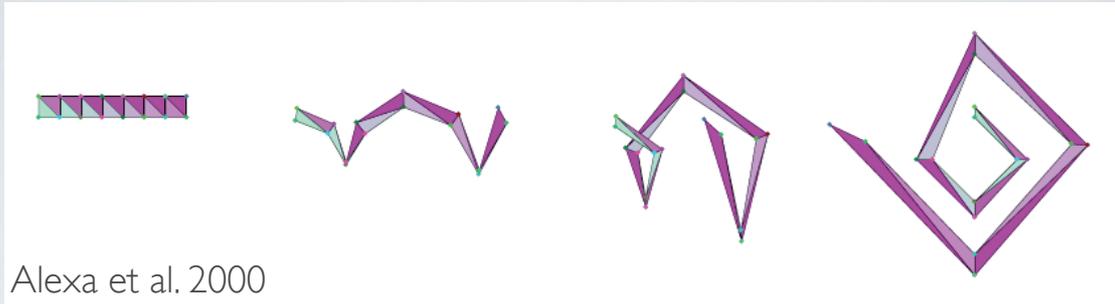
- [Igarashi et al. 05] 相似変換について不変

$$E_i^S(A_i(t), B_i(t)) := \min_{s, \delta \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \tau_i} \|sR_\delta A_i(t)p_k - B_i(t)p_k\|^2$$

- 写像間の距離をみるほうがより安定した変形が得られる  
[Kaji et al. 12]: 相似変換について不変

$$E_i^R(A_i(t), B_i(t)) := \min_{s, \delta \in \mathbb{R}} \|sR_\delta A_i(t) - B_i(t)\|_F^2$$

## Demonstration (Video)



## Global Interpolation

Comparing local error functions:  $E_i^F$  vs  $E_i^R$

1. Local error function (1) (flip)
2. Local error function (2) (total figure)
3. Local error function (3) (rotation)

## ARAPにおける数理的側面

- (計算可能な)エネルギー最小化問題を解いた
  - 写像間の距離と点ごとの距離(の総和)との違いを利用する
  - さまざまなエネルギーの可能性の検討は残る
- Exponential map の活用による新たな補間法を探る
- 3次元への拡張を推進中

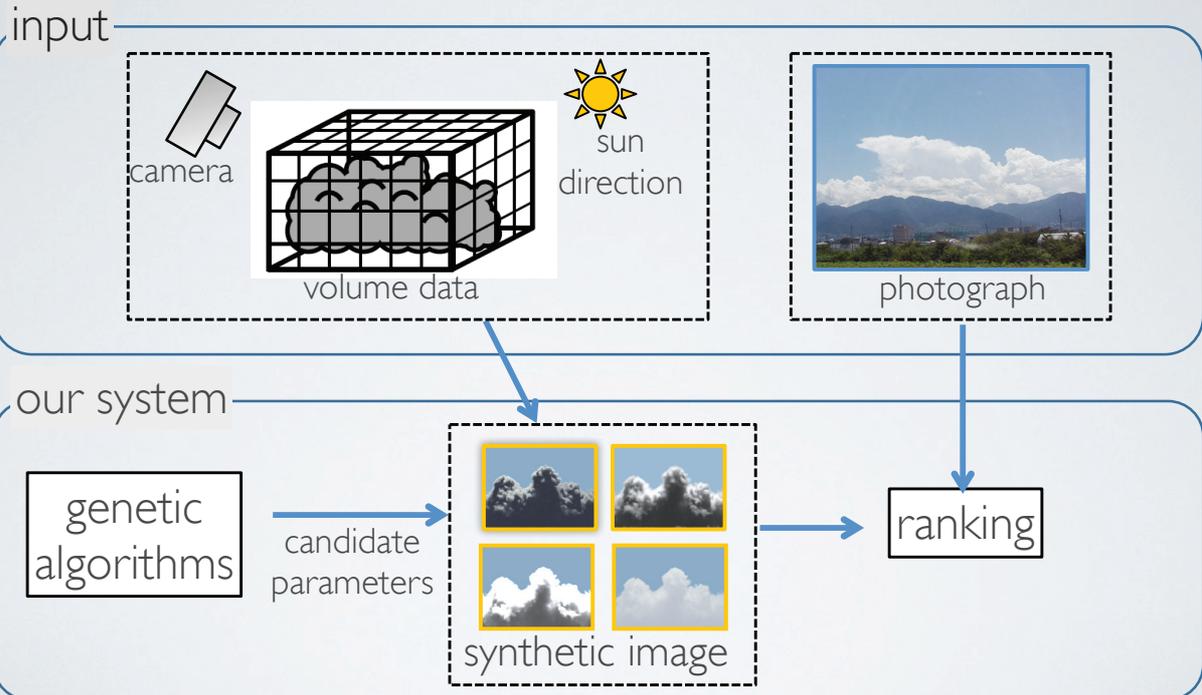


## C. 雲のレンダリングに関する逆問題

- 3次元のボリュームデータが与えられたときに、その陰影に関する情報を、パラメータ指示でなく、与えられた別の写真をもとに決定する.
- 積雲について、類似形状の写真をリファレンスとして与え、レンダリング用のパラメータを推定するという逆問題を解く.

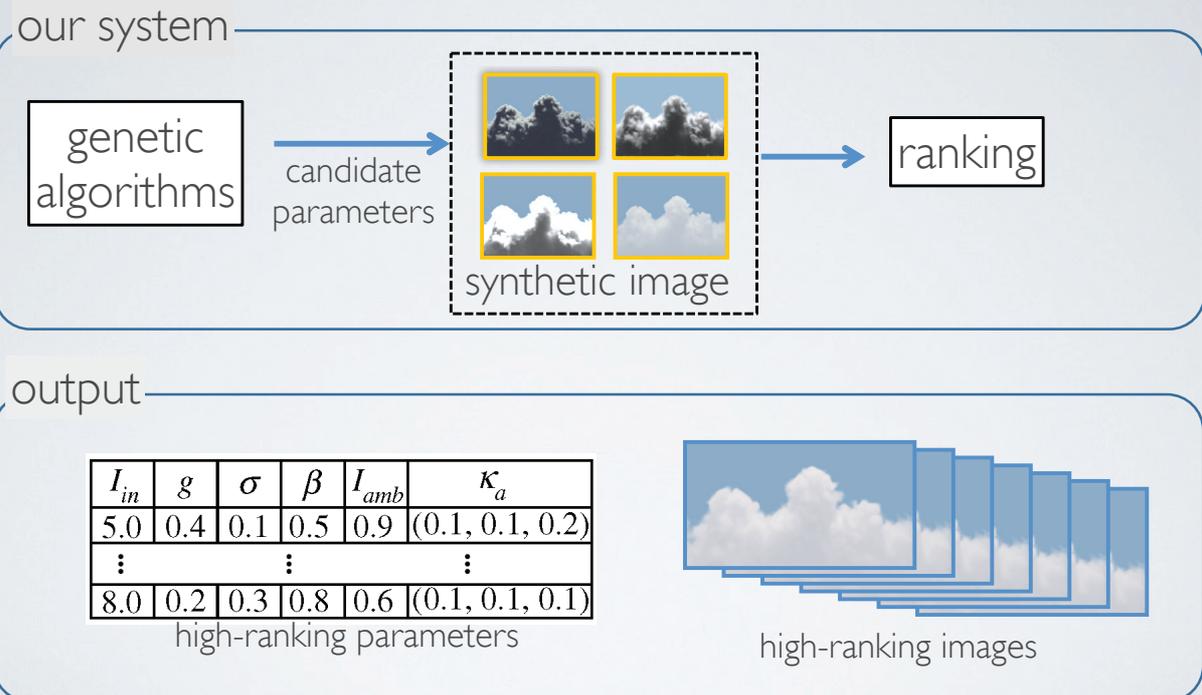


# アルゴリズムの概要



Dobashi et al. *ACM TOG Vol 31(6)* (SIGGRAPH Asia 2012)

# アルゴリズムの概要



## 問題の定式化

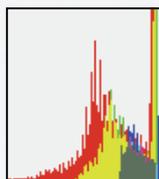
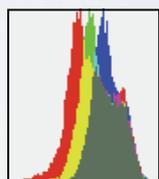
$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{c}} O \left( \begin{array}{c} \text{synthetic image} \\ \text{photograph} \end{array} \right)$$

$\mathbf{c}$  : parameters for rendering synthetic clouds

$O$  : objective function measuring visual difference

## 問題の定式化

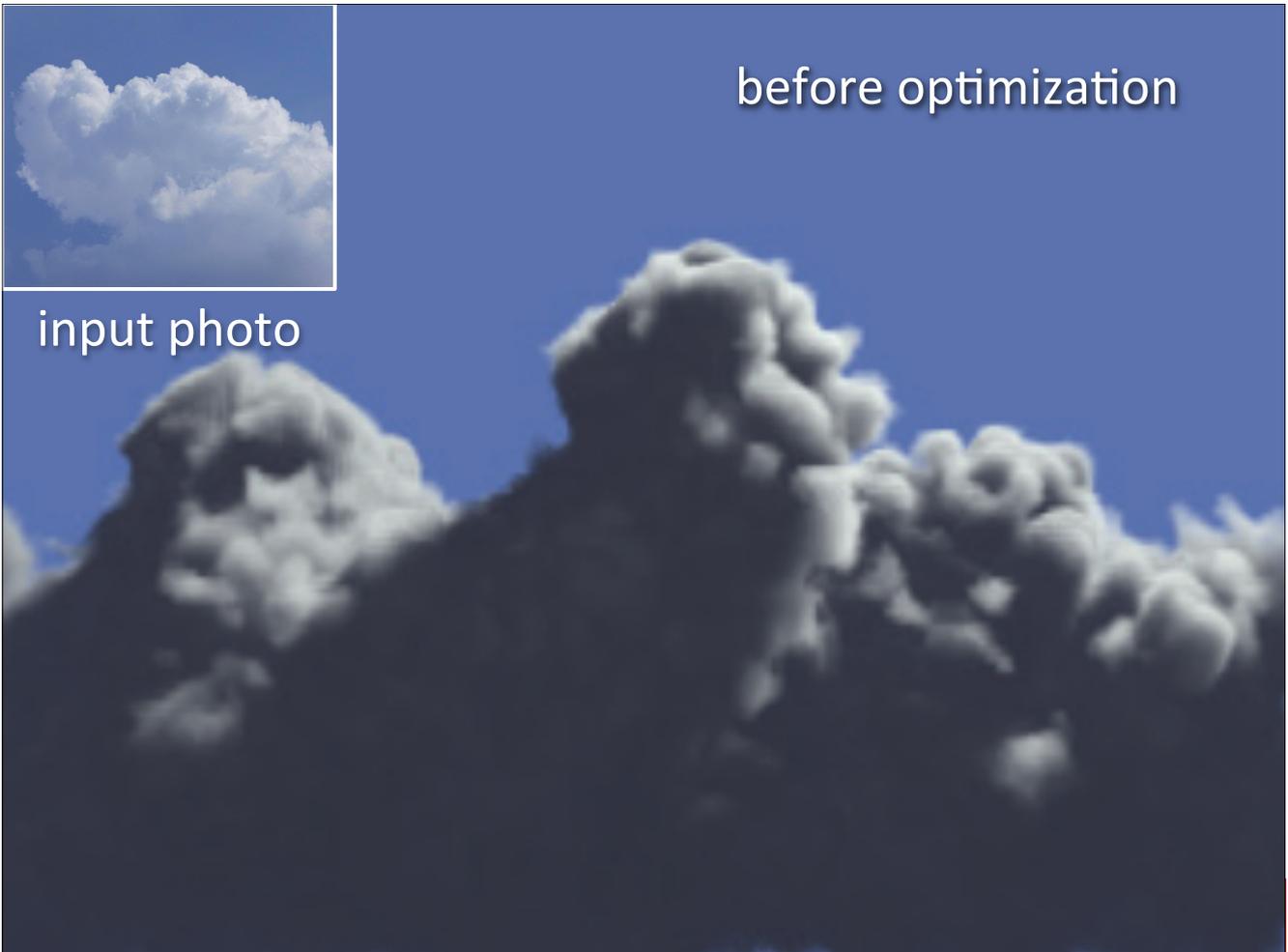
$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{c}} O \left( \begin{array}{c} \text{synthetic image} \\ \text{photograph} \end{array} \right)$$

$O =$  |  -  |

color histograms

結果:

写真から得られる陰影のバリエーション





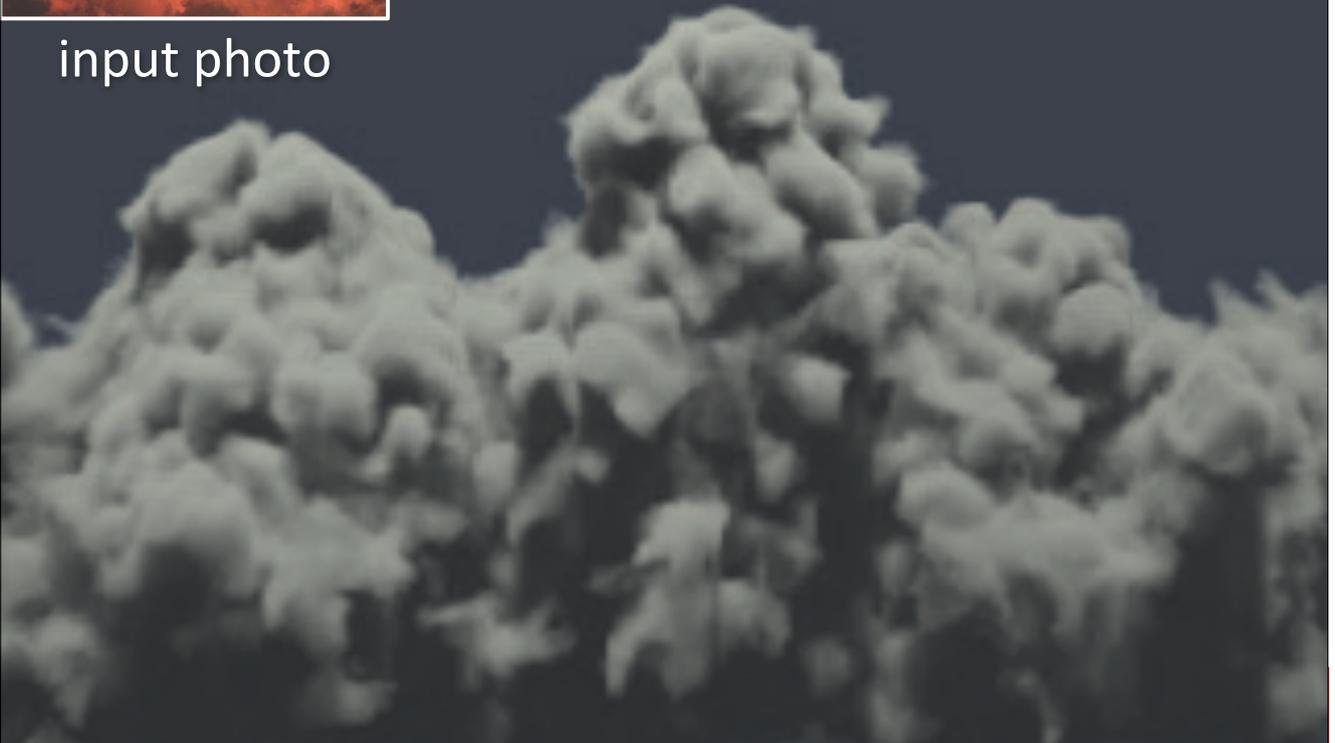
input photo

after optimization



input photo

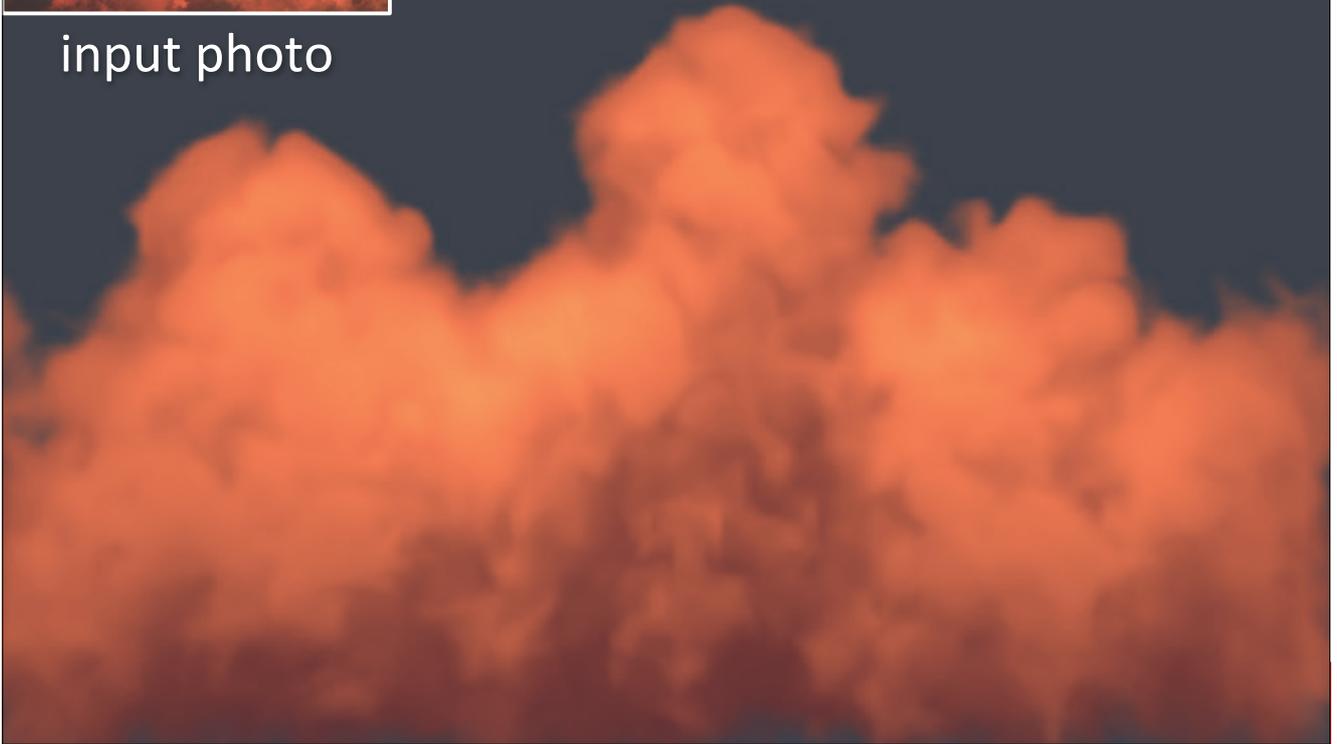
before optimization





input photo

after optimization



数学的発想とは？



# 数学の強み

多様性

一般性

抽象性

## 多様性

- 数学を組み合わせ、新しい考え方を導入する

例: ハイライトシェーダー: 幾何学を、関数解析  
(あるいは変換群) を通じて記述する

# 多様性

- 幾何学を関数解析を通じて論じる

例: ハイライトシェーダー: 陰影として生じる  
「形」の変形を、その上に定義された関数の変換  
とその合成を通じて実現する

Anjyo and Hiramitsu. *IEEE CG&A Vol 23(4)*

# 多様性

- 確率論的手法を関数解析を通じて論じる

例: ベイズ推定の発想は確率論的だが、関数解析  
的に捉えることで (有限次元) 再生核ヒルベルト  
空間上の決定論的な問題に帰着できる.

# 一般性

- より広く捉え、一件異なる手法の共通点を探ることで、問題解決へ切り込む

例: ベイズ推定の定式化と RBF補間手法は、どちらも再生核ヒルベルト空間という共通の枠組みで論じることができる。

# 抽象性

- より広く捉え、別の見方を導入し、問題を解く

例: アフィン変換にもとづく変形操作のパラメトライゼーション: アフィン変換たちをLie群とみなすことで、それに付随するLie環を経由した体積保存に近いロバストな連続変形が可能となる。