多面体集合

新しい PolyhedralSets パッケージが提供する Maple 2015 の新機能により、等式と不等式の集合 (H 表現) または頂点と半直線の集合 (V 表現) で定義された集合の処理が可能になりました。この追加機能を使用すると、集合の幾何学的特性およびトポロジー特性を調査し、標準的な集合を処理して、線形変換を施すことができます。

$with(PolyhedralSets)$

$$[AffineHull, Area, CharacteristicCone, ConvexHull, Coordinates, Dimension, Display, DualSet, Edges, Equal, ExampleSets, Faces, Facets, Graph, ID, InteriorPoint, IsBounded, IsEmpty, IsFace, IsInInterior, IsUniversalSet, Length, LinearTransformation, LinearitySpace, LocatePoint, Plot, PolyhedralSet, PrintLevel, Project, Relations, SplitIntoSimplices, Translate, Vertices, VerticesAndRays, Volume, in, intersect, subset] \tag{1}$$

集合の作成

多面体集合は、等式と厳密ではない不等式のリストから作成できます。不要な関係式が除外されたうえで、残りの関係式が正準形に変換されるため、それ以降の演算は高速に処理されます。

$relations := [x+y \le 2, x+2\,y \le 3, x+y+z=1]:$

$polyset := PolyhedralSet(relations);$

$$\begin{cases} Coordinates & : \quad [x, y, z] \\ Relations & : \quad [-1 \le z, y \le z+2, x = -y-z+1] \end{cases} \tag{1.1}$$

集合は頂点と半直線のリストから作成することもできます。リストの頂点と半直線は自動的に選別され、極となる頂点と半直線のみが集合から取り込まれます。

$vertices, rays := \left[[1, 2], \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], [0, -1]\right], [[-2, -2]]:$

$polyset := PolyhedralSet(vertices, rays);$

$$\begin{cases} Coordinates & : \quad [x_1, x_2] \\ Relations & : \quad \left[-1+x_2 \le x_1, x_1 \le x_2+1, x_1 \le \frac{x_2}{3}+\frac{1}{3}\right] \end{cases} \tag{1.2}$$

集合は H 表現として表示されますが、V 表現への再変換も容易です。

$VerticesAndRays(polyset);$

$$[[1, 2], [0, -1]], [[-1, -1]] \tag{1.3}$$

ExampleSets サブパッケージでは、効率的に共通集合を作成することができます。ExampleSets- NDimensions および ExampleSets- ThreeDimensions を参照してください。

$ExampleSets{:-}Tetrahedron(\,);$

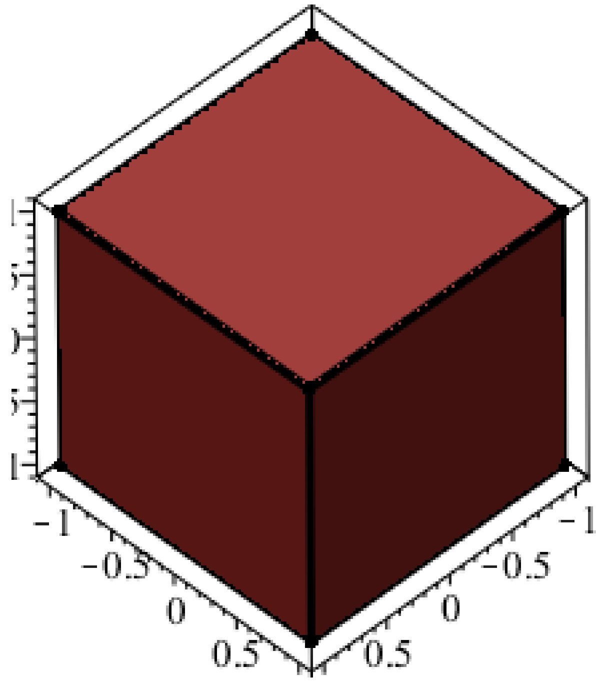
$$\begin{cases} Coordinates & : \quad [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : \quad [-x_2-x_3-1 \le x_1, x_2+x_3-1 \le x_1, x_1 \le -x_3+x_2+1, x_1 \le x_3-x_2+1] \end{cases} \tag{1.4}$$

可視化

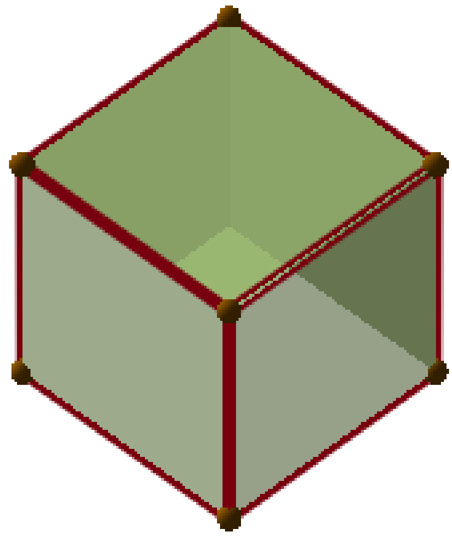
有界集合と非有界集合のどちらであっても、2-D または 3-D 表示が可能です。可視化のスタイルは完全にカスタマイズできるため、ウェブページ、ドキュメント、プレゼンテーションにシームレスに統合できます。

$c := ExampleSets{:-}Cube(\,):$

> $Plot(c)$



> $Plot(c, faceoptions = [transparency = 0.5, color = \text{"Fill Niagara Green"}], edgeoptions = [color = \text{"Line Niagara Burgundy"}, thickness = 5], vertexoptions = [color = \text{"Point Niagara 9"}, symbolsize = 40], axes = none)$



集合の構造

集合の面を特定すると、集合の構造を調べることができます。任意の次元の面は、n 次元集合の頂点より得られる (n-1) 面から求められます。

$t := ExampleSets{:-}Tetrahedron(\,) :$

$t\_faces := Faces(t)$

$$\left[\left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [-1 \le x_3, x_3 \le x_2, x_2 \le 1, x_1 = x_3 - x_2 + 1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 \le 1, -1 \le x_2, x_2 \le x_3, x_1 = -x_3 + x_2 + 1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 \le 1, -x_3 \le x_2, x_2 \le 1, x_1 = x_2 + x_3 - 1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [-1 \le x_3, -1 \le x_2, x_2 \le -x_3, x_1 = -x_2 - x_3 - 1] \end{array}\right.\right] \tag{3.1}$$

$t\_vertices := Faces(t, dimension = 0)$

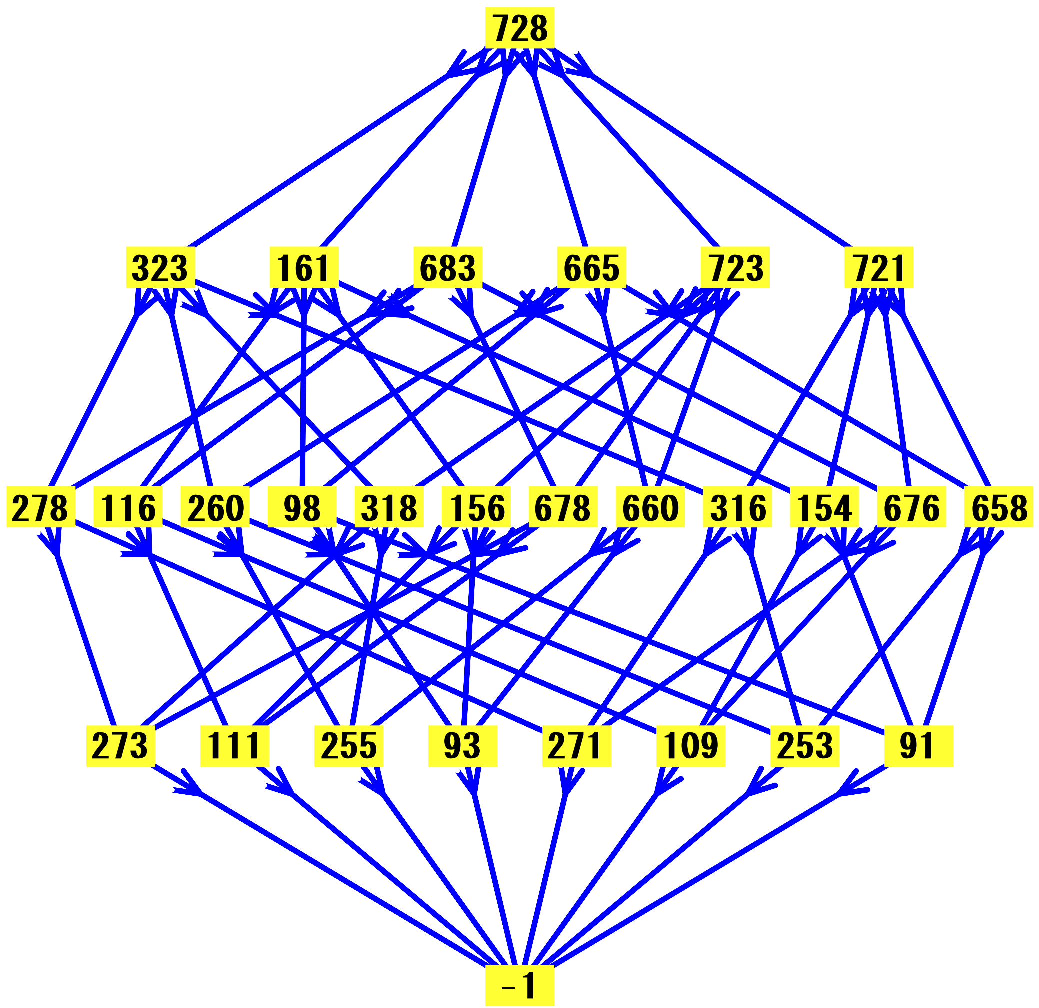
$$\left[\left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 = 1, x_2 = -1, x_1 = -1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 = -1, x_2 = 1, x_1 = -1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 = -1, x_2 = -1, x_1 = 1] \end{array}\right., \left\{\begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1] \end{array}\right.\right] \tag{3.2}$$

面のグラフを生成すると、点を共有している面を簡単に確認できます。GraphTheoryパッケージの機能を活用することで、集合の構造をさらに詳細に調査することも可能です。

$c := ExampleSets\text{:-}Cube(\ ):$

$c\_graph, c\_plot := Graph(c, output = [graph, plot]):$

$plots\text{:-}display(c\_plot)$



$GraphTheory[Neighbors](c\_graph, 323)$

$$[728, 278, 260, 318, 316] \tag{3.3}$$

集合の変換処理

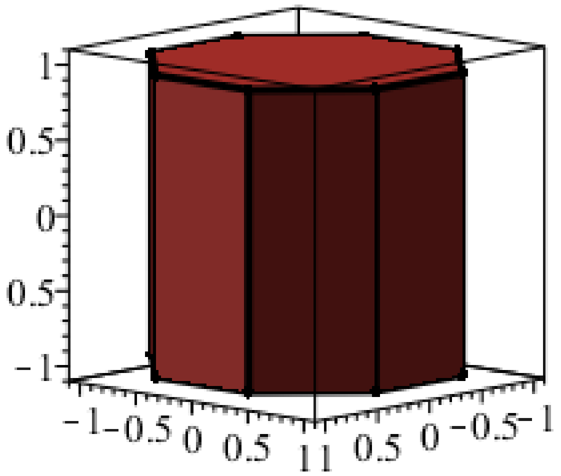
有界集合と非有界集合のどちらであっても、また、原点を含むか否かにかかわらず、多面体集合の双対を計算できます。以下に、原点を含む有界集合を使用して、双対多面体においてどのように頂点が面に (またはその逆に) マッピングするかを示します。

> $octaprism := PolyhedralSet\Big(\Big[-1 \le z, z \le 1,$

> $octaprism\_dual := DualSet(octaprism)$

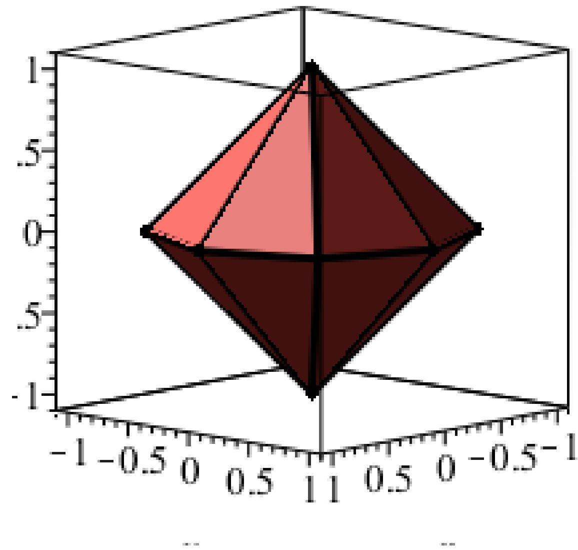
$$-1 \leq y, y \leq 1, \text{-}y - \frac{66922}{47321} \leq x, -1 \leq x, y - \frac{66922}{47321} \leq x, x \leq y + \frac{66922}{47321}, x \leq 1, x \leq \text{-}y + \frac{66922}{47321} \Big] \Big) :$$

> *Plot*(*octaprism*, *orientation* = [43, 80, 0])



$$octaprism\_dual := \left\{ \begin{array}{lll} Coordinates & : & [x, y, z] \\ Relations & : & \left[-\frac{47321\, z}{19601} - \frac{473}{19} \right. \end{array} \right.$$

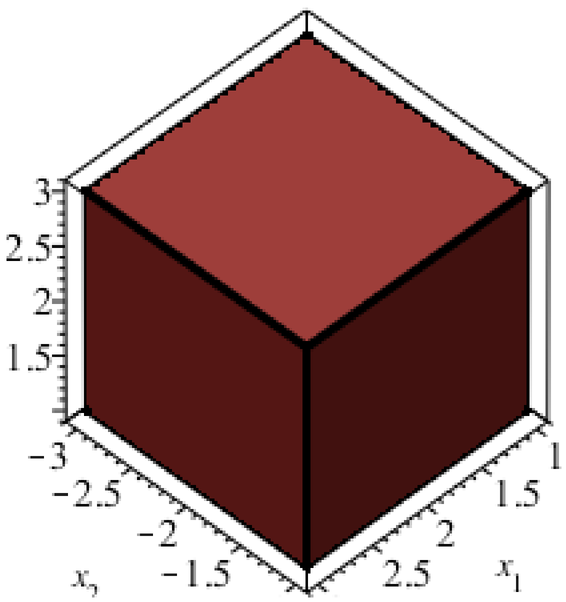
> *Plot*(*octaprism_dual*, *orientation* = [43, 80, 0])



> c := *Translate*(*ExampleSets*:-*Cube*( ), [2, -2, 2])

$$c := \left\{ \begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [1 \leq x_3, x_3 \leq 3, -3 \leq x_2, x_2 \leq \end{array} \right.$$

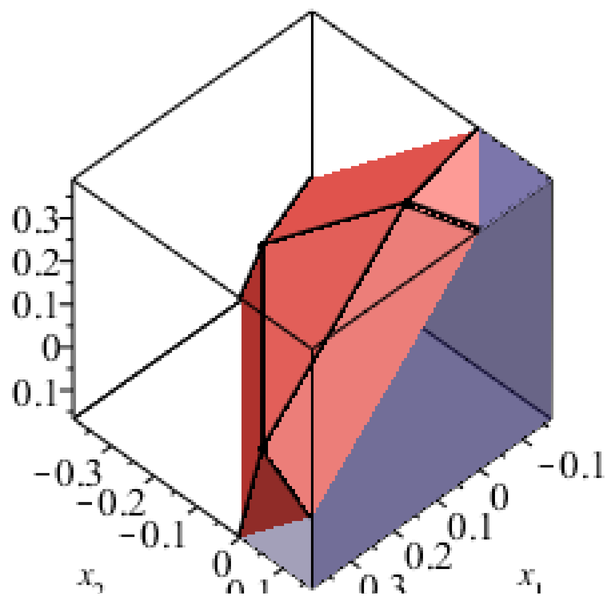
> *Plot*(c)



> *c_dual* := *DualSet*(c)

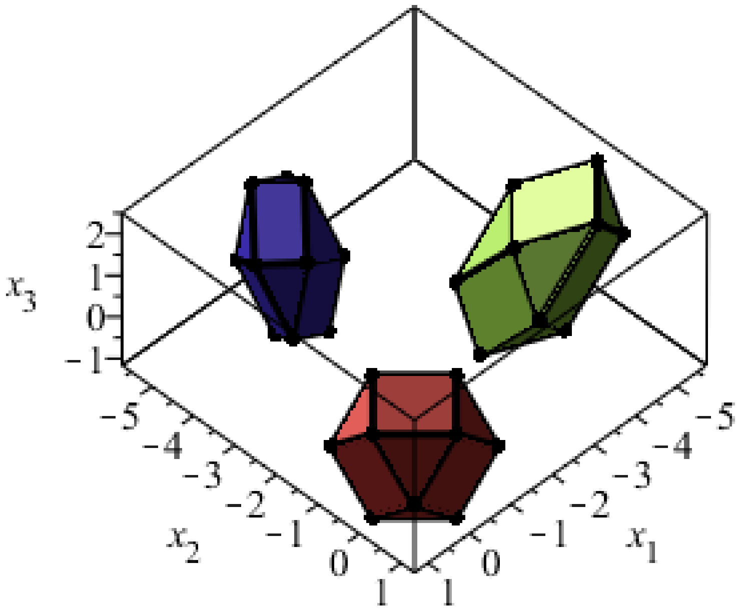
$$c\_dual := \left\{ \begin{array}{lll} Coordinates & : & [x_1, x_2, x_3] \\ Relations & : & [x_1 \leq 3\, x_2 - x_3 + 1, x_1 \leq 3 \end{array} \right.$$

> *Plot*(*c_dual*)



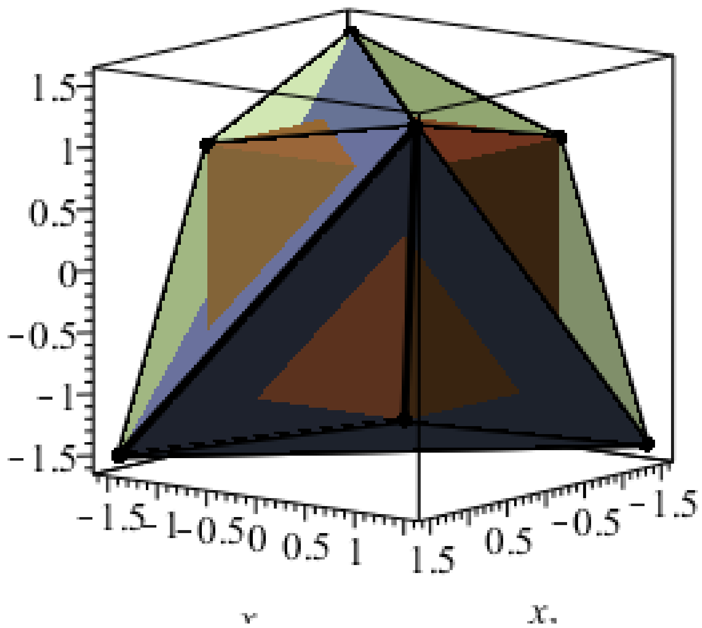
線形行列の変換、並進、および射影もサポートされています。

Linear transformations and translations (blue and green) applied to the semireg



交叉、凸包、包含テスト、等価テストなどの基本的な集合機能を使用すると、簡単な操作で多面体集合を処理できます。

Form the convex hull (green) of a cube (red) and a tetrahedron (blue)



n 次元集合のサポート

パッケージに含まれるアルゴリズムは、高次元の集合にも対応しているため、任意の集合について体積などの特性を計算することもできます。

$s5 := ExampleSets\text{:-}Simplex(5)$

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathit{Coordinates} & : & [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \\ \mathit{Relations} & : & [0 \le x_5, 0 \le x_4, 0 \le x_3, 0 \le x_2, 0 \le x_1, x_1 \le -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 1] \end{array}\right. \quad (5.1)$$

Volume(*s5*)

$$\frac{1}{120} \tag{5.2}$$

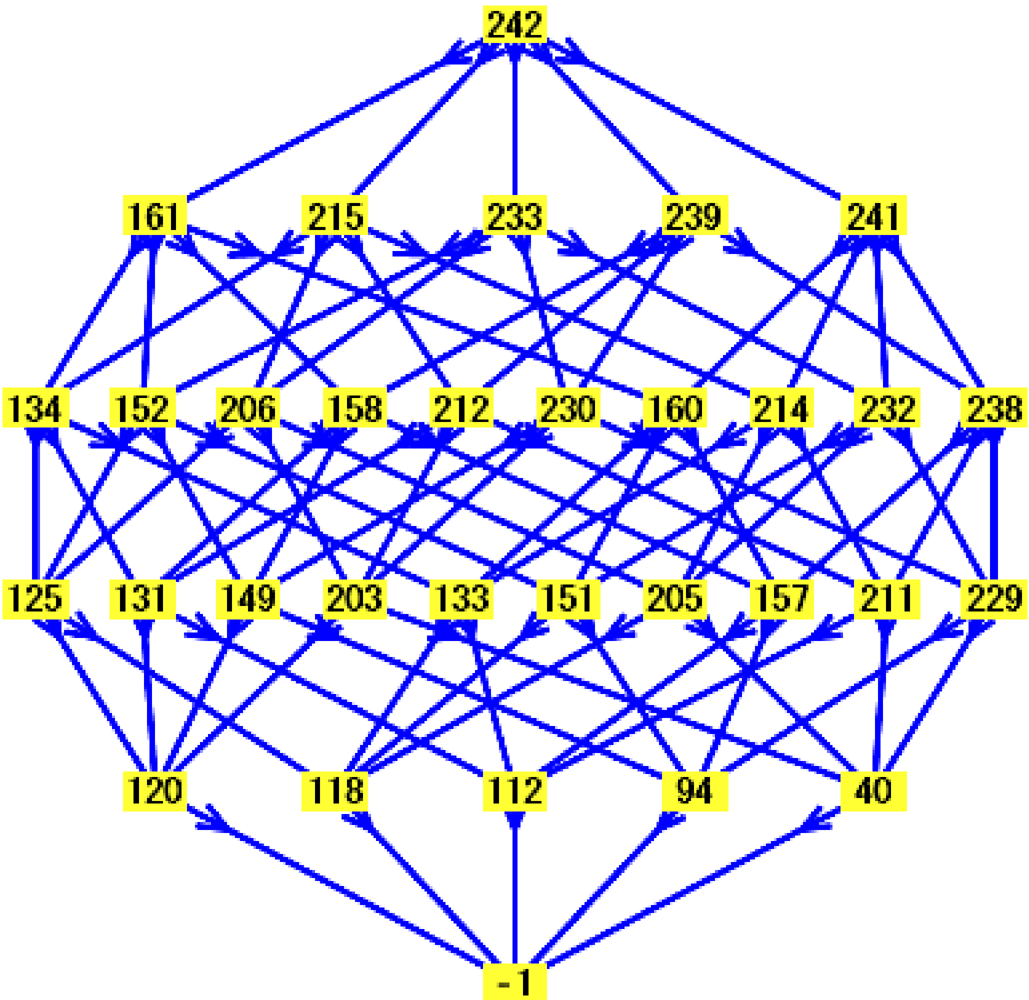
集合演算子も同じくすべての次元で機能します。

ExampleSets:-*Simplex*(5) **subset** *ExampleSets*:-*Hypercube*(5)

$$\text{true} \tag{5.3}$$

また、集合のトポロジー特性も同様に調査できます。

Graph(*ExampleSets*:-*Simplex*(4))



参照

PolyhedralSets パッケージ (概要)、ExampleSets- NDimensions、ExampleSets- ThreeDimensions、GraphTheory パッケージ (概要)

Pages That Link to This Page