小群データベースとデータベース検索コマンドの拡張

GroupTheory パッケージに含まれる小群のデータベースが拡張され、位数 512 未満のすべての群が含まれるようになりました。従来は、位数 200 までの群しか含まれていませんでした。

また、新しいSearchSmallGroups および SearchTransitiveGroups コマンドが追加され、小群データベースおよび可移群データベースの検索機能がそれぞれ実装されました。

> $with(GroupTheory):$

非アーベルの単純群をデータベースで検索します。小群 ID のシーケンスが返されます。

> $SearchSmallGroups(simple, abelian = false)$

$$[60, 5], [168, 42], [360, 118], [504, 156] \quad (1$$

位数が 30 未満で位数 4 の Sylow 2 部分群を持つ群および一意の Sylow 3 部分群をデータベースで検索し、有限に表現された群として出力します。

> $SearchSmallGroups(order < 30, sylow_2 = 4, nsylow_3 = 1, form = \text{"fpgroup"})$

$$\langle a1, a2, a3 \mid a2^2, a1^2\, a2^{-1}, a3^3, a2^{-1}\, a1^{-1}\, a2\, a1, a3^{-1}\, a2^{-1}\, a3\, a2, a3^{-1}\, a1^{-1}\, a3\, a1\, a3^{-1} \rangle, \langle a1 \mid a1^{12} \rangle, \langle a1, a2, a3 \mid a1^2, a2^2, a3^3, a2^{-1}\, a1^{-1}\, a2\, a1, a3^{-1}\, a2^{-1}\, a3\, a2, a3^{-1}\, a1^{-1}\, a3\, a1\, a3^{-1} \rangle, \langle a1, a2, a3 \mid a1^2, a2^2, a3^3, a1^{-1}\, a2^{-1}\, a1\, a2, a1^{-1}\, a3^{-1}\, a1\, a3, a2^{-1}\, a1^{-1}\, a2\, a1, a2^{-1}\, a3^{-1}\, a2\, a3, a3^{-1}\, a1^{-1}\, a3\, a1, a3^{-1}\, a2^{-1}\, a3\, a2 \rangle \quad (2$$

データベースの非冪零群のうち、位数 8 の四元群と同形の部分群の個数を特定します。

> $SearchSmallGroups(derivedsubgroup = [8, 4], nilpotent = false, form = count)$

$$101 \quad (3$$

次数 6 を持つ正則的な置換群の可移群 ID を出力します。

> $SearchTransitiveGroups(degree = 6, isregular)$

$$[6, 1], [6, 2] \quad (4$$

> $G := TransitiveGroup(6, 2)$

$$G := \langle (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 4)(2, 3)(5, 6) \rangle \quad (5$$

> $Degree(G)$

$$6 \quad (6$$

> $IsRegular(G)$

$$true \quad (7$$

Cayley グラフの新しい可視化

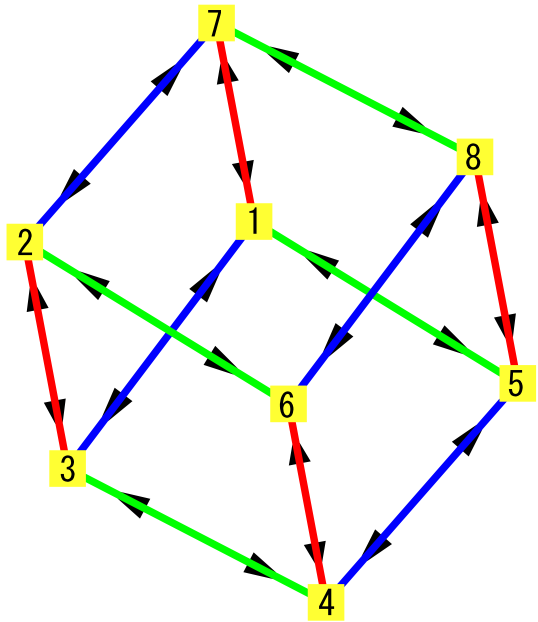
GroupTheory パッケージに、小群の Cayley グラフを計算および可視化するための新しいコマンドが追加されました。

> *with*(*GraphTheory*) :

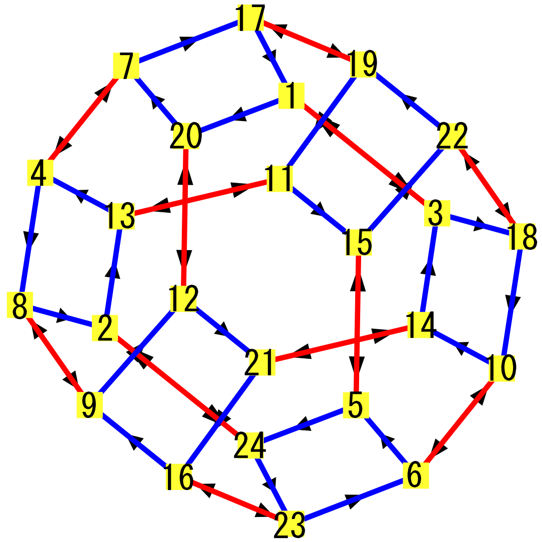
> *C* := *CayleyGraph*(*ElementaryGroup*(2, 3))

C := *Graph 1: a directed unweighted graph with 8 vertices and 24 arc(s)* (8

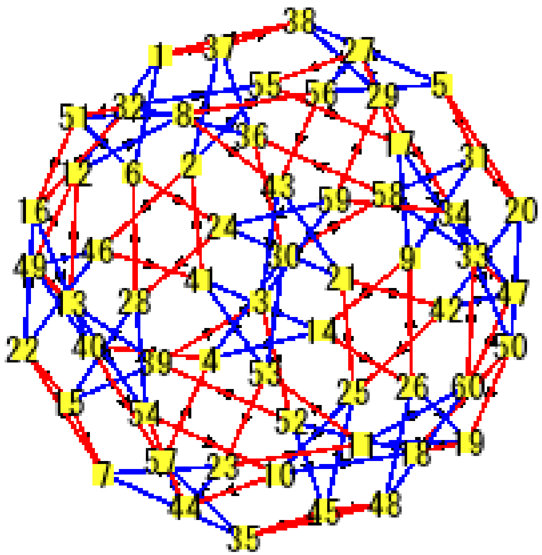
> *DrawGraph*(*C*, '*style*' = '*spring*')



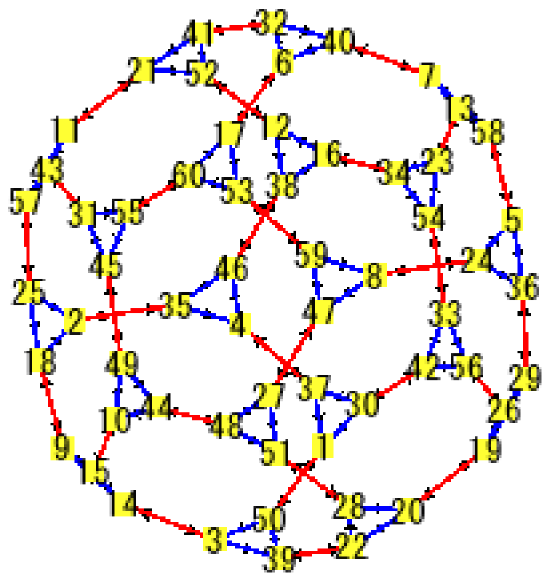
> *DrawGraph*(*CayleyGraph*(*Symm*(4)), '*style*' = '*spring*')



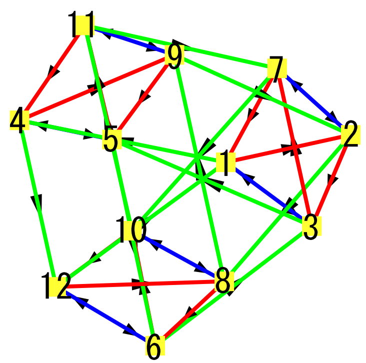
> $DrawGraph(CayleyGraph(Alt(5)), 'style' = 'spring')$



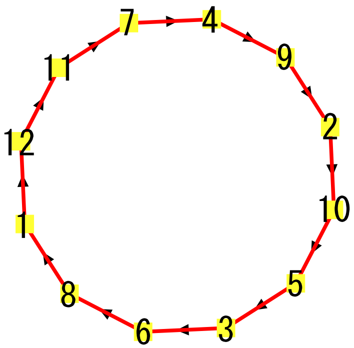
> $DrawGraph(CayleyGraph(PSL(2, 5)), 'style' = 'spring')$



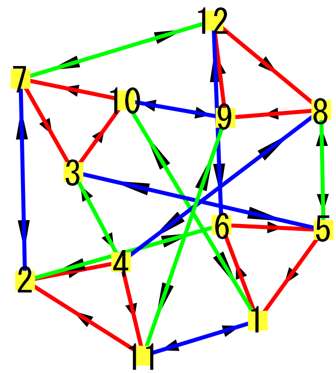

```
> seq(DrawGraph(CayleyGraph(SmallGroup(12, i)), 'style' = 'spring'), i = 1 ..NumGroups(12))
```



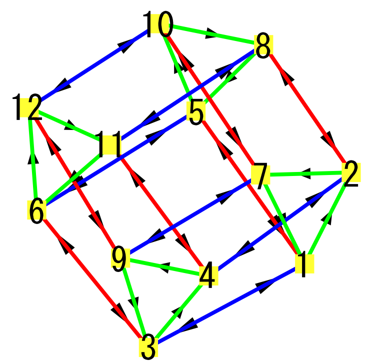
,



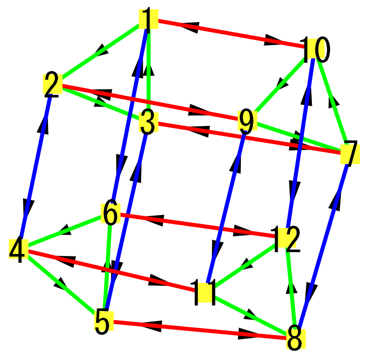
,



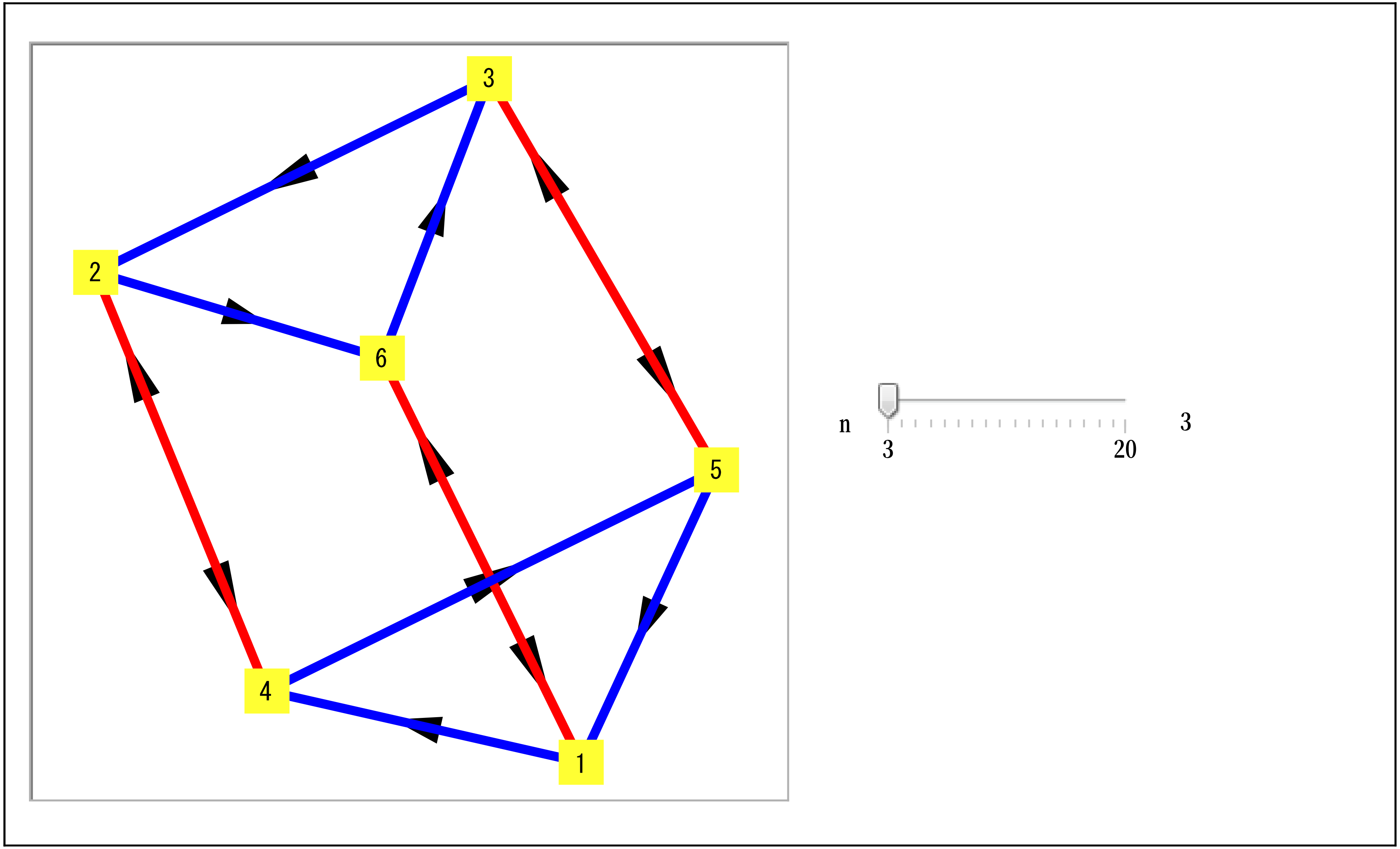
,



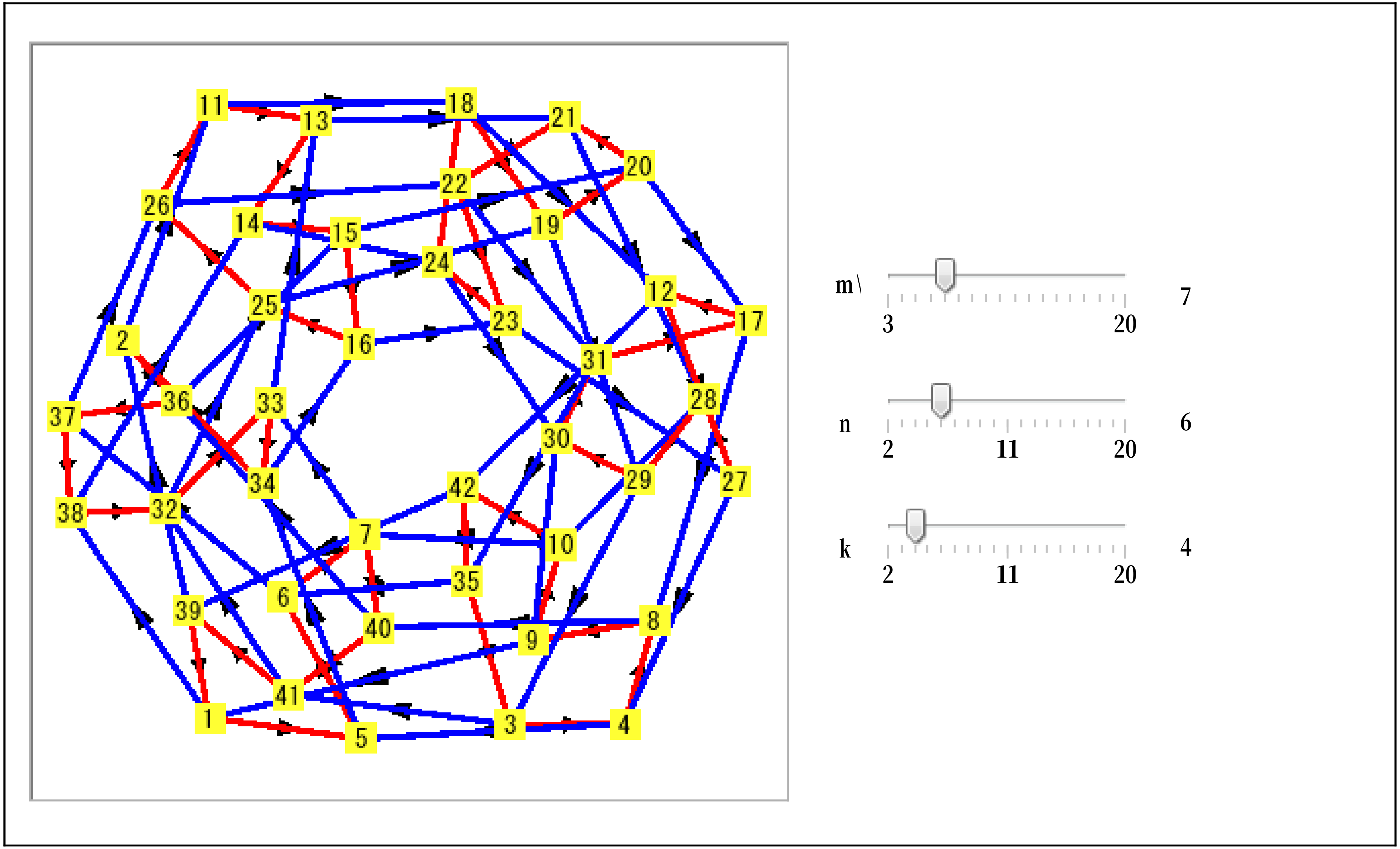
,




```
> Explore(DrawGraph(CayleyGraph(DihedralGroup(n)), 'style' = 'spring'), 'parameters' = ['n' = 3 ..20], 'placement' = 'right')
```



> *Explore*(*DrawGraph*(*CayleyGraph*(*MetacyclicGroup*(*m*, *n*, *k*)), '*style*' = '*spring*'), '*parameters*' = ['*m*' = 3 ..20, '*n*' = 2 ..20, '*k*' = 2 ..20], '*initialvalues*' = ['*m*' = 7, '*n*' = 6, '*k*' = 4], '*placement*' = '*right*')



その他の新しいコマンド

このバージョンでは ComplexProduct、ElementOrder、Exponent、FreeGroup、および IsCyclic コマンドが新しく追加されました。

群内の複素数は群の部分集合にすぎません。ComplexProduct コマンドを使用すると、群 G 内の 2 つの複素数 A と B の積を計算し、A の a と B の b に対する $a.b$ という形式の積の集合として定義できます。

> $G := Alt(6)$

$$G := \mathbf{A}_6 \tag{9}$$

> $S := SylowSubgroup(5, G)$:

> $g := RandomElement(G)$:

> $g := RandomElement(G)$:

> $A := Elements(LeftCoset(g, S))$:

> $g := RandomElement(G)$:

> $B := Elements(LeftCoset(g, S))$:

> $ComplexProduct(A, B, G)$

{(2, 4, 6), (1, 2, 3, 6, 4), (1, 3, 4, 2, 6), (1, 4, 2, 5, 3), (1, 4, 3, 6, 2), (1, 5, 3, 2, 4), (1, 5, 4, 6, 3), (1, 5, 6, 4, 2), (1, 6, 4, 5, 3), (2, 3, 4, 5, 6), (2, 3, 6, 5, 4), (2, 6, 4, 3, 5), (1, 2)(4, 5), (1, 2)(3, 4, 6, 5), (1, 4)(5, 6), (1, 5)(3, 4), (1, 6)(2, 5, 4, 3), (1, 3, 6)(2, 4, 5), (1, 4, 5)(2, 6, 3), (1, 4, 6)(2, 3, 5), (1, 2, 4, 3)(5, 6), (1, 3, 2, 5)(4, 6), (1, 3, 5, 4)(2, 6), (1, 6, 3, 4)(2, 5), (1, 6, 3, 5)(2, 4)} (10

> $g := RandomElement(G)$:

> $B := Elements(RightCoset(S, g))$:

> $ComplexProduct(B, A, G)$

{(1, 2, 4), (1, 4, 3), (2, 5, 4), (3, 4, 6), (4, 5, 6), (1, 3, 4, 5, 2), (1, 3, 6, 4, 2), (1, 3, 6, 5, 4), (1, 4, 6, 5, 2), (2, 4, 3, 6, 5), (1, 4)(2, 5, 6, 3), (1, 5)(2, 6, 4, 3), (1, 6)(2, 4, 5, 3), (1, 3, 5)(2, 4, 6), (1, 4, 5)(2, 3, 6), (1, 6, 2)(3, 5, 4), (1, 6, 4)(2, 3, 5), (1, 6, 5)(2, 3, 4), (1, 2, 5, 3)(4, 6), (1, 2, 5, 6)(3, 4), (1, 2, 6, 3)(4, 5), (1, 4, 2, 6)(3, 5), (1, 5, 3, 4)(2, 6), (1, 5, 4, 6)(2, 3), (1, 5, 6, 3)(2, 4)} (11

新しい ElementOrder コマンドを使用すると、置換群または Cayley 表群として表現される有限群の元の位数を計算します。

> $G := Symm(4)$:

> $p := Perm([[1, 3], [2, 4]])$

$$p := (1, 3)(2, 4) \quad (12$$

> $ElementOrder(p, G) = PermOrder(p)$

$$2 = 2 \quad (13$$

> $C := CayleyTableGroup(DihedralGroup(4))$

$$C := \langle \textit{a Cayley table group with 8 elements} \rangle \quad (14$$

> $ElementOrder(5, C)$

$$2 \quad (15$$

Exponent コマンドを使用すると、置換群または Cayley 表群として表現される有限群の指数を計算します。

> $G := ElementaryGroup(3, 4)$

$$G := C_3^4 \qquad (16$$

> $Exponent(G)$

$$3 \qquad (17$$

> $Exponent(DihedralGroup(6))$

$$6 \qquad (18$$

> $Exponent(Group(Perm([[1,2],[3,4]]), Perm([[1,3],[2,4]])))$

$$2 \qquad (19$$

有限で表現される群として自由群を構成するには、新しい FreeGroup コマンドを使用します。

> $F := FreeGroup(3)$

$$F := \langle \_x1, \_x2, \_x3 \mid \ \rangle \qquad (20$$

> $type(F, 'FPGroup')$

$$\mathrm{true} \qquad (21$$

> $IsAbelian(F)$

$$\mathrm{false} \qquad (22$$

IsCyclic コマンドを使用すると、ある群が巡回群か否かを確認できます。

> $IsCyclic(Group(Perm([[1,2],[3,4]]), Perm([[1,3],[2,4]])))$

$$\mathrm{false} \qquad (23$$

> $G := DirectProduct(CyclicGroup(2), CyclicGroup(3))$

$$G := C_2 \times C_3 \qquad (24$$

> $IsCyclic(G)$

$$\mathrm{true} \qquad (25$$

> $G := DirectProduct(CyclicGroup(2), CyclicGroup(4))$

$$G := C_2 \times C_4 \qquad (26$$

> $IsCyclic(G)$

$$\mathrm{false} \qquad (27$$

参照

GroupTheory

► Pages That Link to This Page