

Maple 18 は、旧バージョンの多変数多項式操作の効率の改善をベースにしています。多くの多項式が [Maple 17 で導入された](#) 高性能データ構造を活用できるようになり、大規模な計算における Maple の性能もさらに改善され、モジュロ p の多項式計算速度も大幅に向上しました。これらの変化により、多項式に明確に関係する計算や、基本的な多項式計算に関する多くの Maple ライブラリルーチンの速度が向上しています。

▼ 次数範囲の拡張

Maple 18 では、新しいデータ構造を用いることにより多項式の最高次数の範囲が拡張されています。Maple 17 では、全次数と各 n 指数を保存するために、 n 変数の多項式は $\frac{64}{n+1}$ ビット使用していました。そのため、Maple 17 では最高全次数は最高部分次数と等しい値になっています。これは最大値

である n に対し、必要以上の制限があることとなります。たとえば、変数 $n=11$ の場合、各指数に 5 ビット、全次数に 5 ビット与えられ、4 ビットは未使用のままとなります。Maple 18 では、全次数に追加のビットが与えられ、この新しいデータ構造により広い範囲の多項式を保存できるようになります。

64 ビットマシンの実際的な限界を以下に示します。全次数に使用できるビットにより制限されているケースについてはハイライトしています。ほとんどの場合は、最高部分次数の和を保存できます。

変数の数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
最高部分次数	209715 1	65535	4095	1023	511	255	127	63	31	31	15	15	15	15
最高全次数	419430 2	65535	16380	5115	1023	255	255	567	310	341	180	195	210	15

変数の数	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
最高部分次数	7	7	7	7	7	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
最高全次数	112	119	126	127	15	63	66	69	72	75	78	81	84	63	15	3



▼ 行列式によるベンチマーク

変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ の n ヴァンデルモンド行列によって行列式 n を計算します。行列式には $n!$ 項および全次数 $\frac{n(n-1)}{2}$ が含まれます。 $n=4$, のとき、行列と行列式は以下のとおりです。

$A := \text{LinearAlgebra:-VandermondeMatrix}([x_1, x_2, x_3, x_4])$

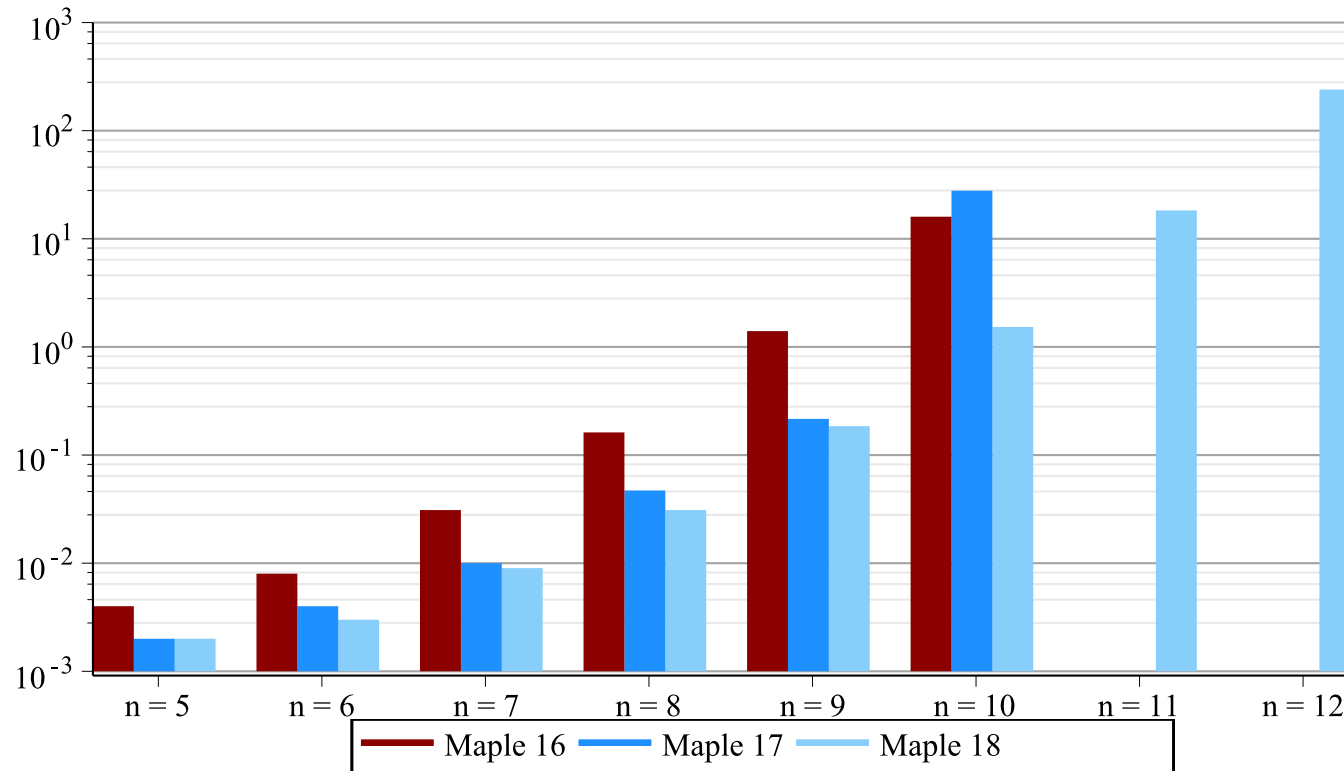
$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$\text{LinearAlgebra:-Determinant}(A, \text{method} = \text{minor})$

$$\begin{aligned} & x_1^3 x_2^2 x_3 - x_1^3 x_2^2 x_4 - x_1^3 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_2 x_4^2 + x_1^3 x_3^2 x_4 - x_1^3 x_3 x_4^2 - x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3^3 - x_1^2 x_2 x_4^3 - x_1^2 x_3^3 x_4 + x_1^2 x_3 x_4^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 - x_1 x_2^3 x_4^2 - x_1 x_2^2 x_3^3 + x_1 \\ & x_2^2 x_4^3 + x_1 x_3^3 x_4^2 - x_1 x_3^2 x_4^3 - x_2^3 x_3^2 x_4 + x_2^3 x_3 x_4^2 + x_2^2 x_3^3 x_4 - x_2^2 x_3 x_4^3 - x_2 x_3^3 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4^3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ベンチマークは 64 ビット Linux を使用し、64GB RAM の Intel Core i7 3930K 3.2GHz 上で行われました。Maple 16 では、すべての多項式に対し、従来の「積和」データ構造を使用しています。Maple 17 では、 $n=9$ までの行列式に対し、新しい多項式データ構造を使用していますが、 $n=10$ で全次数の場がオーバーフローし、パフォーマンスが落ちます。Maple 18 では追加のビットによって $n=12$, に達し、4.79 億項生成されるまで計算されます。

Vandermonde Determinant (seconds)



密な多項式に対する高速アルゴリズム

Maple 18 では、クロネッカー代入を使用して、2 次オーダーの時間内で密な多項式の乗算および除算を行います。性能は [GMP 5.1.1 への更新](#) と Maple のガベージコレクタの調整によって改善されています。変数 n (各変数における次数 d) および b ビット係数の場合の密な多項式の乗算と除算を以下に示します。ベンチマークは 64 ビット Linux を使用し、16GB RAM の Intel Core i5 4670 3.4GHz 上で行われました。

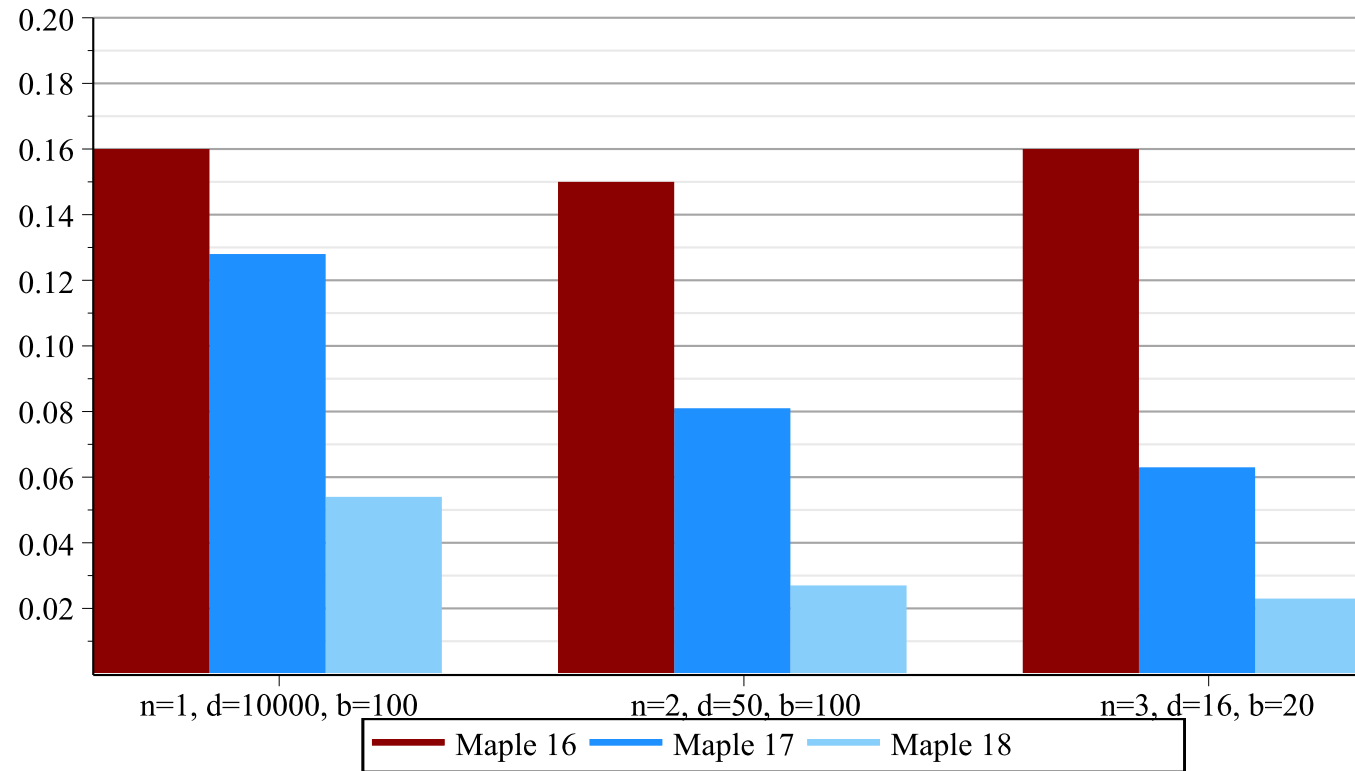
```
c := rand(1..ceil(2evalf( $\frac{b}{n}$ ))) :
```

```
f := expand(mul(randpoly(cat(x, i), degree = d, dense, coeffs = c), i = 1..n)) :
```

```
g := expand(mul(randpoly(cat(x, i), degree = d, dense, coeffs = c), i = 1..n)) :
```

```
CodeTools:-Usage(divide(expand(f·g), f, 'q')) :
```

Multiply and Divide (seconds)

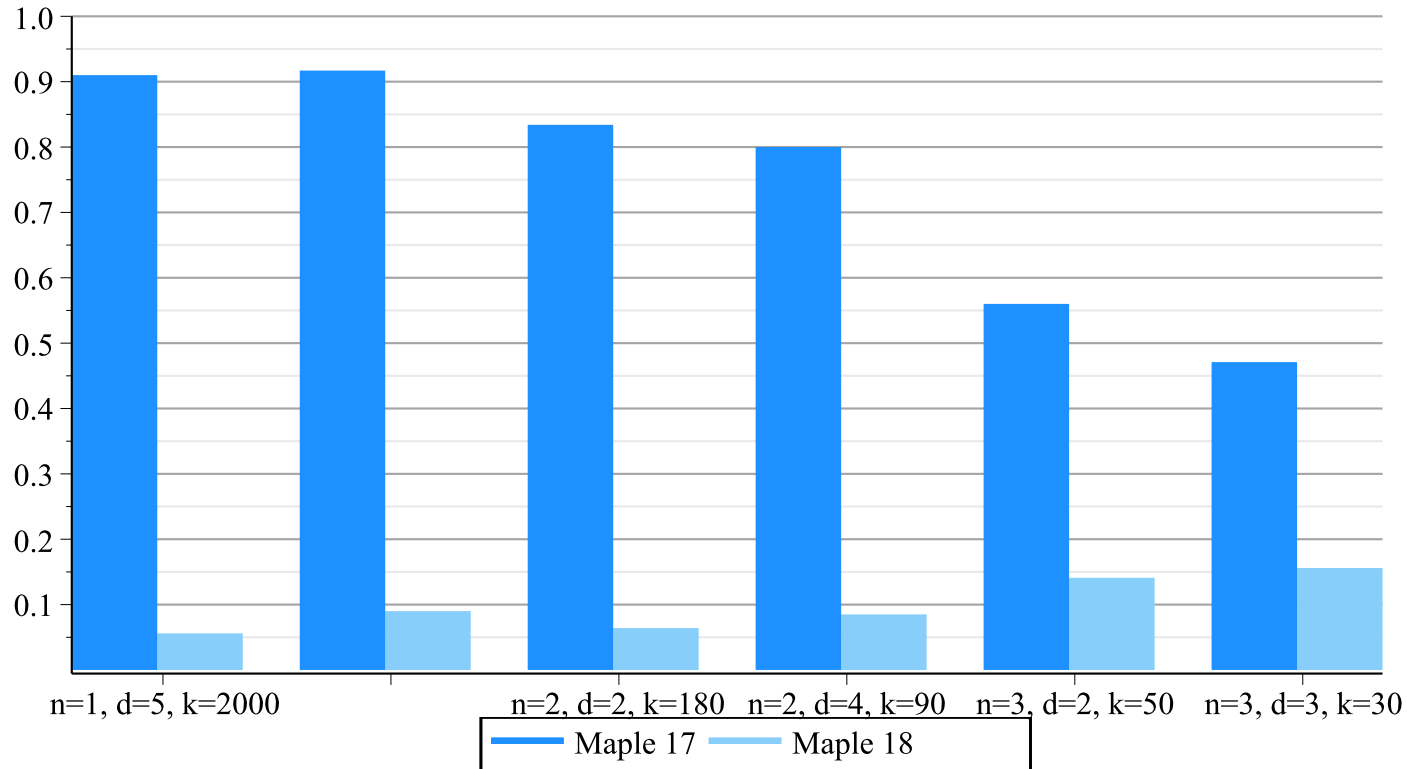


多項式のべき乗

Maple 18 では、短い多項式のべき乗を展開するために新しいアルゴリズムを使用しています。これは、平方乗算 (密な多項式で使用)、および乗算の繰返し (疎な多項式で使用) を補完するものです。改善されたヒューリスティックな手法によりこの中からアルゴリズムを選択します。以下のベンチマークは 64 ビット Linux を使用し、16GB RAM の Intel Core i5 4670 3.4GHz 上で行ったものです。

```
f := randpoly( {seq( cat(x, i), i = 1 .. n ) }, degree = d, dense) :  
CodeTools:-Usage( expand(fk ) ) :
```

Sparse Powers (seconds)



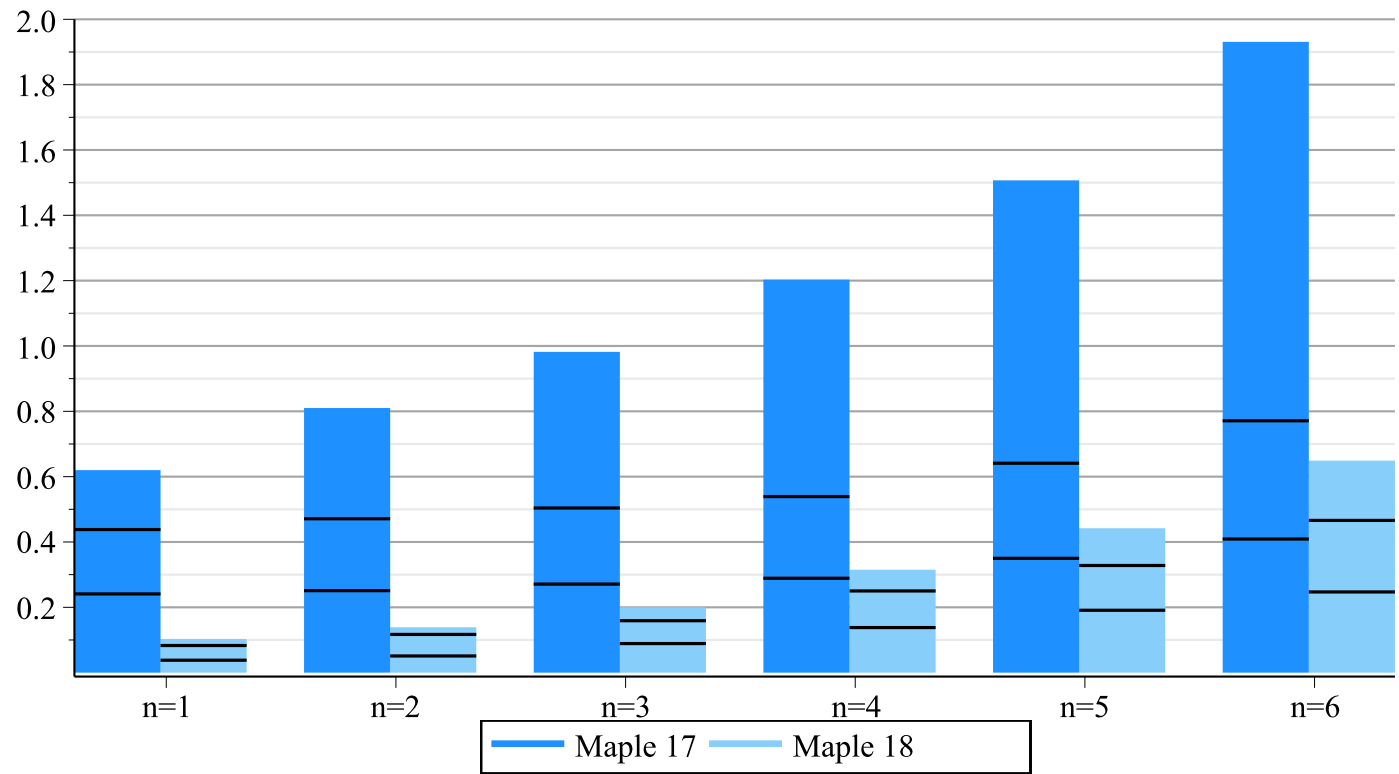
▼ モジュロ p の計算

Maple 18 以前では、 \mathbb{Z}_p の多項式計算ではインタープリタ型の Maple ライブラリルーチンをコールしていました。これによって、小規模な操作の場合に大幅なオーバーヘッドが生じました。このバージョンでは、非代数の場合、C カーネルに [Eval](#)、[Expand](#)、および [Divide](#) を実装しています。これらのパフォーマンスは、式膨張を防ぐためにモジュロ p によって数字が低減されていることを除き、eval、expand、および divide に匹敵します。以下に示すベンチマークは、これらの操作を 64 ビット Linux を使用し、16GB RAM の Intel Core i5 4670 3.4GHz 上で行ったものです。

```
p := 32003 :
k := 10000 :
v := [seq(cat(x, i), i = 1 ..n)]:
e := [seq(i = rand( ), i = v) ] mod p :
f := randpoly(v, degree = 2, dense) :
g := randpoly(v, degree = 2, dense) :
r := CodeTools:-Usage([seq(Expand( (f + i) g) mod p, i = 1 ..k) ]) :
CodeTools:-Usage([seq(Divide(i, g, 'q') mod p, i = r) ]) :
CodeTools:-Usage([seq( (Eval(i, e)) mod p, i = r) ]) :
```

以下の棒グラフは、各 n にかかる全体時間を示しています。Eval にかかる時間が Divide にかかる時間の上に、そして Expand にかかる時間が一番下に示されます。

Small Polynomials Mod p (seconds)



▼ 参照

[Maple 18 の性能改善](#)、[Maple 18 の新機能](#)

▶ Pages That Link to This Page