

Maple 16での処理効率の改善

Maple 16 では、多項式の計算について多くの効率性の改善が行われています。

- [多項式算術](#)
- [多項式因数分解](#)
- [多項式のイデアル分解](#)
- [コンパイルによる数値 PDE 解](#)

多項式算術

過去の数回のリリースにおいて、Maple における多項式算術の効率は劇的に改善されています。

- 乗算とべき乗 ([expand](#), [Expand mod n](#), [Power mod n](#), [Powmod](#))
- 整除 ([divide](#), [Divide mod n](#))
- 整数係数を持つ単変量多項式および多変量多項式
- 密および疎な多項式

これは、さまざまなテクニックの組み合わせにより実現されています。

- 新規の高速ヒープベースかつ C でインプリメントされた効率的なアルゴリズム
- 新規のコンパクトな内部多項式データ構造
- マルチスレッドとキャッシュ局所性の活用

これらの改善により、Maple の過去のリリースの 22 倍、Mathematica® の最新版の 1800 倍の高速化を実現しています。

Maple の並列インプリメンテーションはさらなる高速化をもたらし、複数コアに対応することができます。

計算時間

乗算、密、3
変数、30 次

M14: 0.65
秒

M15: 0.73 秒

M16: 0.52 秒

Mathematica
8: 110 秒

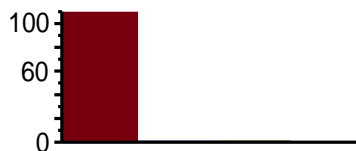
高速化

M16/M14:

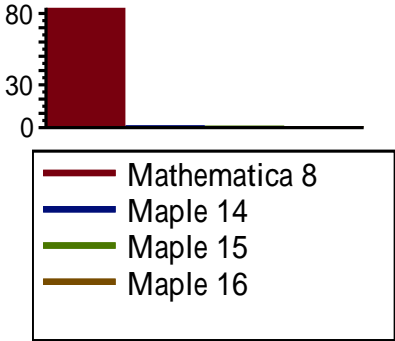
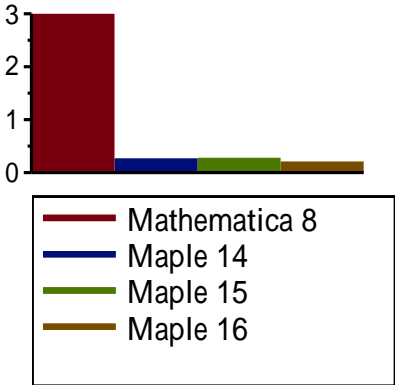
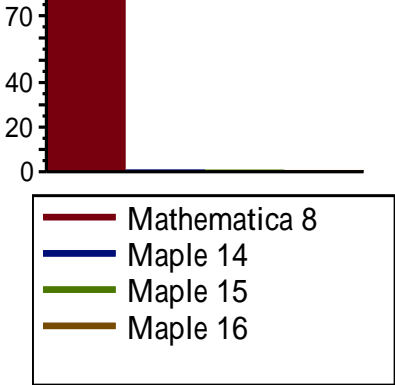
1.3

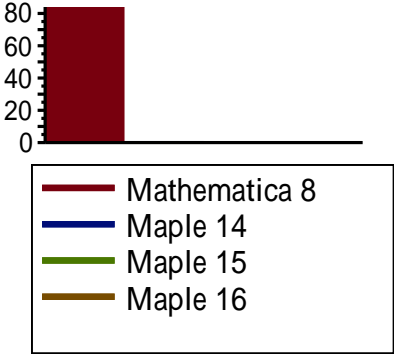
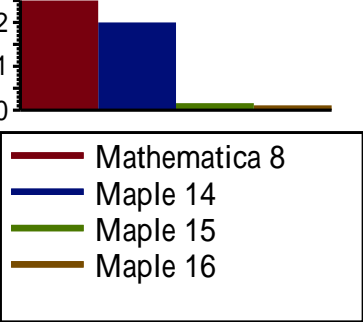
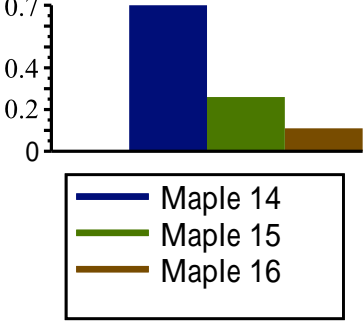
高速化

M16/Mathem
atica8: 210

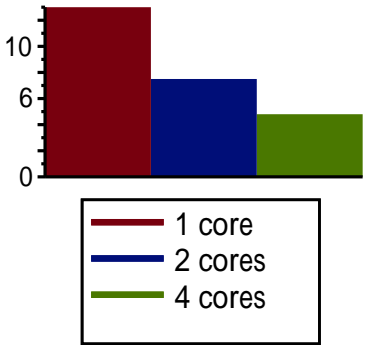
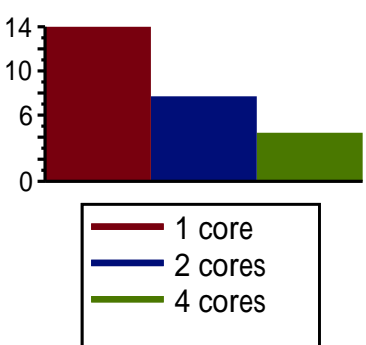


Mathematica 8
Maple 14
Maple 15
Maple 16

<p>除算、密、3 变数、 (60次 / degree 次)</p>	<p>M14: 0.88 秒 M15: 0.75 秒 M16: 0.54 秒 Mathematica 8: 84 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.6 高速化 M16/Mathem atica8: 160</p>	 <p>Bar chart showing performance comparison for '除算、密、3变数' task. The y-axis represents time in seconds, with markers at 0, 30, and 80. Mathematica 8 (red bar) is at approximately 84 seconds. Maple 14 (blue bar), Maple 15 (green bar), and Maple 16 (brown bar) are all clustered near 0.54 seconds. The legend identifies the series: Mathematica 8 (red), Maple 14 (blue), Maple 15 (green), and Maple 16 (brown).</p>
<p>单变量乘算、 疎、100000 次、1000 項</p>	<p>M14: 0.27 秒 M15: 0.28 秒 M16: 0.21 秒 Mathematica 8: 3.0 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.3 高速化 M16/Mathem atica8: 14</p>	 <p>Bar chart showing performance comparison for '单变量乘算' task. The y-axis represents time in seconds, with markers at 0, 1, 2, and 3. Mathematica 8 (red bar) is at 3.0 seconds. Maple 14 (blue bar), Maple 15 (green bar), and Maple 16 (brown bar) are all clustered near 0.21-0.28 seconds. The legend identifies the series: Mathematica 8 (red), Maple 14 (blue), Maple 15 (green), and Maple 16 (brown).</p>
<p>单变量除算、 疎、 (200000 次) / (100000 次), (180000 項) / (1000 項)</p>	<p>M14: 0.27s M15: 0.25s M16: 0.20s Mathematica 8: 78s</p>	<p>高速化 M16/M14: 1.4 高速化 M16/Mathem atica8: 390</p>	 <p>Bar chart showing performance comparison for '单变量除算' task. The y-axis represents time in seconds, with markers at 0, 20, 40, and 70. Mathematica 8 (red bar) is at 78 seconds. Maple 14 (blue bar), Maple 15 (green bar), and Maple 16 (brown bar) are all clustered near 0.20-0.27 seconds. The legend identifies the series: Mathematica 8 (red), Maple 14 (blue), Maple 15 (green), and Maple 16 (brown).</p>

<p>非整除性テスト、密、3変数、 (<i>degree</i> 60) / (<i>degree</i> 30)</p>	<p>M14: 0.99 秒 M15: 0.090 秒 M16: 0.046 秒 Mathematica 8: 84 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 22 高速化 M16/Mathematica8: 1800</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Software</th> <th>Speedup</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mathematica 8</td> <td>1.0</td> </tr> <tr> <td>Maple 14</td> <td>22</td> </tr> <tr> <td>Maple 15</td> <td>1800</td> </tr> <tr> <td>Maple 16</td> <td>1800</td> </tr> </tbody> </table>	Software	Speedup	Mathematica 8	1.0	Maple 14	22	Maple 15	1800	Maple 16	1800
Software	Speedup												
Mathematica 8	1.0												
Maple 14	22												
Maple 15	1800												
Maple 16	1800												
<p>モジュラー除算、密、4変数、 512 bit prime、 (<i>degree</i> 30) / <i>linear</i></p>	<p>M14: 2.0 秒 M15: 0.16 秒 M16: 0.11 秒 Mathematica 8: 2.5 秒</p>	<p>高速化 M16/M14: 18 高速化 M16/Mathematica8: 23</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Software</th> <th>Speedup</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mathematica 8</td> <td>1.0</td> </tr> <tr> <td>Maple 14</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>Maple 15</td> <td>23</td> </tr> <tr> <td>Maple 16</td> <td>23</td> </tr> </tbody> </table>	Software	Speedup	Mathematica 8	1.0	Maple 14	18	Maple 15	23	Maple 16	23
Software	Speedup												
Mathematica 8	1.0												
Maple 14	18												
Maple 15	23												
Maple 16	23												
<p>単変量べき乗、多項式および31ビット素数のモジュロ、密、 1024 次</p>	<p>M14: 0.7 秒 M15: 0.26 秒 M16: 0.11 秒 Mathematica 8: コンピュータフリーズ</p>	<p>高速化 M16/M14: 6.4</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Software</th> <th>Speedup</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Mathematica 8</td> <td>Computer Freeze</td> </tr> <tr> <td>Maple 14</td> <td>6.4</td> </tr> <tr> <td>Maple 15</td> <td>0.26</td> </tr> <tr> <td>Maple 16</td> <td>0.11</td> </tr> </tbody> </table>	Software	Speedup	Mathematica 8	Computer Freeze	Maple 14	6.4	Maple 15	0.26	Maple 16	0.11
Software	Speedup												
Mathematica 8	Computer Freeze												
Maple 14	6.4												
Maple 15	0.26												
Maple 16	0.11												

複数コアでの計算時間

乗算、密、4 変数、20 次	M16, 1 コア: 13 秒 M16, 2 コア: 7.5 秒 M16, 4 コア: 4.8 秒	高速化 4 コア: 2.7	
除算、密、4 変数、(20 次) / (10 次)	M16, 1 コア: 14 秒 M16, 2 コア: 7.7 秒 M16, 4 コア: 4.4 秒	高速化 4 コア: 3.2	

多項式因数分解

Maple には多項式因数分解用の 2 つのコマンドがあります。多変量多項式をそれ以上分解不可能な既約因子へ乗法分解します。

最も簡単なのは、[factor](#) コマンドを使用した整数係数を持つ単変量多項式の場合です。

```
factor(x8 - 1)
```

$$(x - 1) (x + 1) (x^2 + 1) (x^4 + 1) \quad (2.1)$$

結果の因子の係数も整数であることを注意してください。たとえば、 $x^2 + 1$ は $(x - i)(x + i)$ には分解できません。より精密な分解を得るために、係数で使用する第二引数を指定することができます。

```
factor(x8 - 1, i)
```

$$(x^2 + 1) (-x^2 + 1) (-x + 1) (x + 1) (x - 1) (x + 1) \quad (2.2)$$

ほとんどの場合で、多項式は複数の変数を持ち、 i や $\sqrt{2}$ または $\sqrt{t - \sqrt{2}}$ などの非有理数式を含むことが可能です。入れ子形式または係数にパラメータを含む (例では t など) ことができます。そのような場合は、コマンド `evala(Factor(...))` によって処理します。しかし、このコマンドは、通常すべての累乗根が `RootOf` 形式で表される必要があります。

$$r := \text{RootOf}(_Z^2 - t) \quad \text{RootOf}(_Z^2 - t) \quad (2.3)$$

$$\text{factor}(x^2 - 2 r x + t) \quad x^2 - 2 \text{RootOf}(_Z^2 - t) x + t \quad (2.4)$$

$$\text{evala}(\text{Factor}(x^2 - 2 r x + t)) \quad (x - \text{RootOf}(_Z^2 - t))^2 \quad (2.5)$$

Maple 16 では `evala(Factor(...))` コマンドの計算効率、特に複数の入れ子形式の `RootOf` がある場合に劇的に改善されています。高速化は新規の効率的疎モジュラーアルゴリズムによるものです。たとえば、つぎの例の実行時間は、同一マシンで Maple 15 よりも約 20 倍高速になっています。

`restart : randomize(1) :`

$$z_1 := \text{convert}(\sqrt{2}, \text{RootOf}) \quad \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \quad (2.6)$$

$$z_2 := \text{convert}(t^{1/3}, \text{RootOf}) \quad \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) \quad (2.7)$$

$$f := \text{evala}(\text{Reduce}(\text{randpoly}([x, y, z_1, z_2, t]))) \quad 34 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) - 20 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \quad (2.8)$$

$$+ 93 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t + 45 x^3 t^2 + 30 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 - 56 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t$$

$$g := \text{evala}(\text{Reduce}(\text{randpoly}([x, y, z_1, z_2, t]))) \quad 47 t^2 + 40 x^2 t + 114 y \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) + 58 x^3 y t + 43 x y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t - 98 t \quad (2.9)$$

$$h := \text{evala}(\text{Expand}(f g)) \quad 21204 x^3 y t + 1360 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) x^2 t + 1972 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) x^3 t - 940 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 - 800 x^3 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t - 1160 x^4 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t + 1960 x y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t + 5394 x^6 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 y + 5130 x^3 t^2 y \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) + 1935 x^4 t^3 y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 + 1200 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 x^2 t + 1740 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 x^3 t - 2240 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 x^3 t - 2240 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 x^3 t \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
& \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 x^2 + 1290 t^2 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) x \\
& - 2408 t^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) x y + 1462 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) x \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t - 860 x^2 y^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t + 3999 x^4 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) t^2 y \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 - 3248 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index} \\
& =1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 x^3 y + 2115 x^3 t^4 + 1800 x^5 t^3 - 4410 x^3 t^3 \\
& - 4560 x y^3 + 2610 x^6 t^3 y + 1598 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 \\
& - 3332 y^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t + 4371 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^3 \\
& + 3720 x^5 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 - 9114 x^3 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) t^2 \\
& + 1410 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t^2 + 3420 y^4 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index} \\
& =1)^2 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) - 2940 y^3 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1)^2 t \\
& - 2632 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^3 \\
& + 5488 \text{RootOf}(_Z^2 - 2, \text{index}=1) \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t^2 \\
& - 12768 \text{RootOf}(_Z^3 - t, \text{index}=1) t y + 7752 y^3
\end{aligned}$$

CodeTools:-Usage(evala(Factor(h))) :

memory used=15.91MiB, alloc change=19.21MiB, cpu time=516.00ms,
real time=4.50s

つぎの表は、Maple 15 と比較したベンチマークを示しています。

変数	RootOfs	パラメータ	indicesの総数	次数	項	Maple 15	Maple 16	高速化
x, y, z	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - 3)$	—	5	10	36	5.0 s	0.21 s	24
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	36	6.1 s	0.34 s	18
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	134	18 s	0.36 s	50
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	10	276	29 s	0.68 s	43
x, y	$\text{RootOf}(_Z^2 - 2), \text{RootOf}(_Z^3 - t)$	t	5	20	36	24 s	0.42 s	57

素因数分解	円	5	1	2	6.8 s	0.82 s	8.3
素因数分解	vermeer	5	1	5	6.4 s	0.60 s	11
素因数分解	wang92 c	4	1	3	45 s	0.84 s	54
素因数分解	ctoa	10	4	2	> 5 min	0.54 s	> 550
素因数分解	butcher	7	3	4	> 5 min	0.42 s	> 710
累乗根	butcher	7	3	4	> 5 min	0.57 s	> 530

▼ コンパイルによる数値 PDF の解

- `compile` オプションが数値 `pdsolve` コマンドに追加され、PDE 数値解の効率的な計算ができます。詳細は、[pdsolve\[numeric\]](#) を参照してください。