区分関数による多項式系の最大・最小計算と図示方法

Maple では、ある多項式系で表現されているシステムに対して、系の最大・最小を区分関数として求めることが可能です。このワークシートでは、Maple の convert コマンドを上手く活用する方法を紹介しています。

まず、変数 x の多項式 f, g, h が次のように定義されているとします；

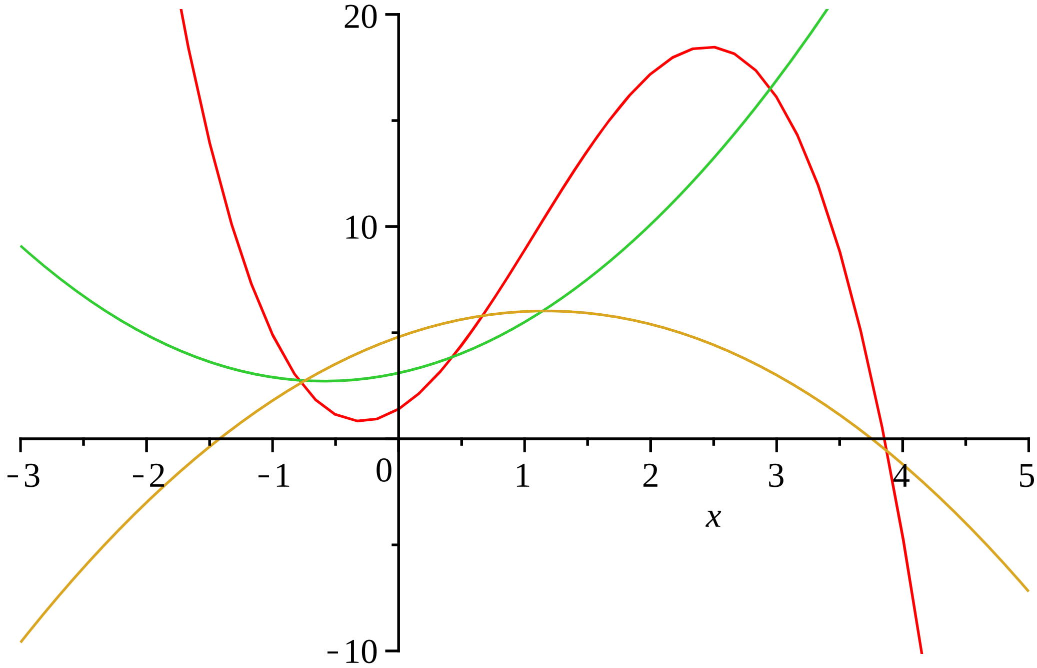
> *restart*

> $f := -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4;\ g := 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1;\ h := -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8$

$$f := -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4$$
$$g := 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1$$
$$h := -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 \qquad \textbf{(1)}$$

この多項式系をプロットすると次のようになります。

> $plot([f, g, h], x = -3..5, view = [default, -10..20])$



人間がグラフを見れば、この系の最大（または最小）がどのような曲線を辿っているかをただちに理解することができますが、コンピュータ上で表現するには少々難解です。しかし、Maple を用いるとこの系の最大（最小）を区分関数で表現することが可能です。

まず、変数 p を f, g, h の最大を取るものとして次のように定義します；

> $p := \max(f, g, h)$

$$p := \max\left(-0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8,\ 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1,\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4\right) \qquad \textbf{(2)}$$

このままでは最大を明示的に得ることが出来ません。しかし、Maple ではこのような最大（最小）の式に対して、いくつかの数学演算を適用することが可能です。例えば、p に対して微分を計算することが可能です。

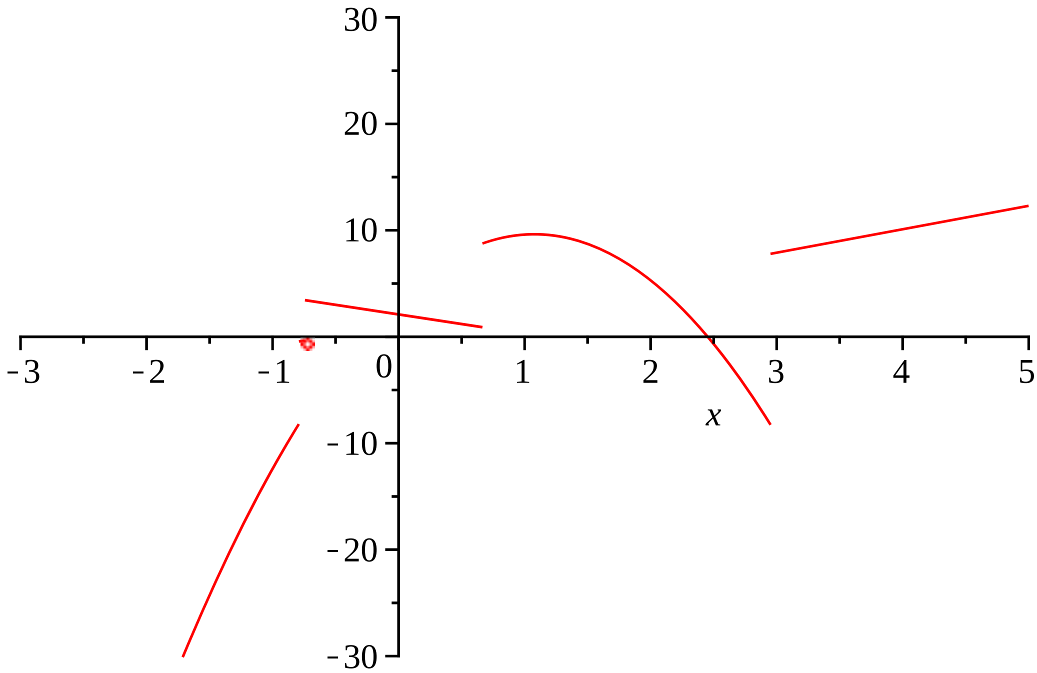
> $dp := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p$

(3)

$$dp := \begin{cases} -5.100000000\, x^2 + 11.\, x + 3.700000000 & x < -0.7915222114 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = -0.7915222114 \\ 2.200000000\, x + 1.300000000 & x < -0.7433981134 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = -0.7433981134 \\ -1.800000000\, x + 2.100000000 & x < 0.6657247084 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = 0.6657247084 \\ -5.100000000\, x^2 + 11.\, x + 3.700000000 & x < 2.951743155 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = 2.951743155 \\ 2.200000000\, x + 1.300000000 & 2.951743155 < x \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

p の計算では、系の連続性を考慮した区分関数表現を自動的に計算します。この結果をプロットすると次のようになります；

> $plot(dp, x = -3..5, discont = true, view = [default, -30..30])$



さて、本来の目的である系の最大及び最小の区分関数による表現の計算方法に戻ります。max または min で定義されている式を明示的に区分関数として表現させるには、Maple の convert コマンドを用います。この際、オプションとして piecewise を指定します；

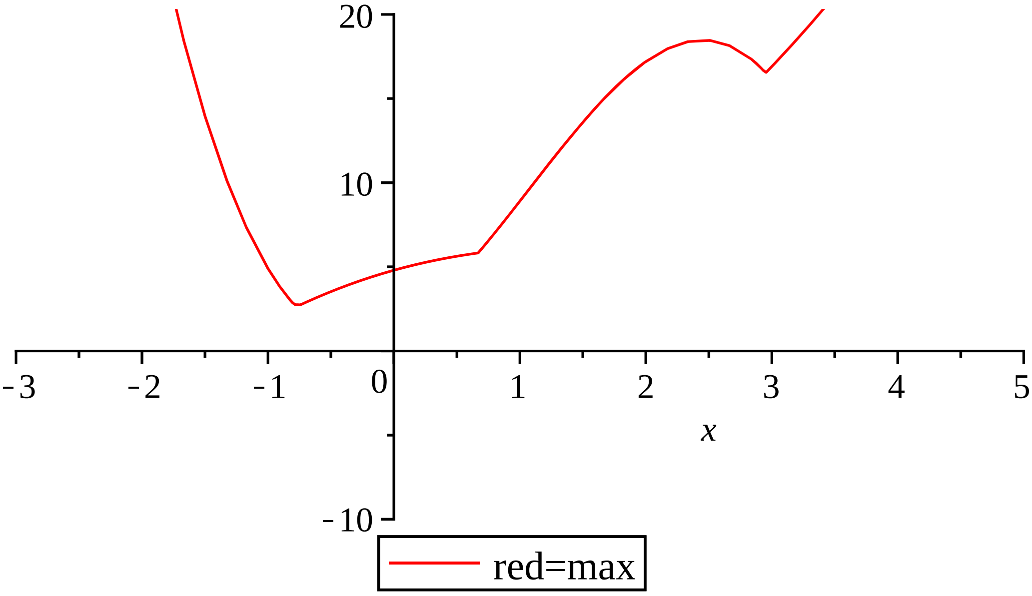
> $q := evalf(convert(p, piecewise))$

$$q := \begin{cases} -1.7\, x^3 + 5.5\, x^2 + 3.7\, x + 1.4 & x \le -0.7915222107 \\ 1.1\, x^2 + 1.3\, x + 3.1 & x \le -0.7433981132 \\ -0.9\, x^2 + 2.1\, x + 4.8 & x < 0.6657247085 \\ -1.7\, x^3 + 5.5\, x^2 + 3.7\, x + 1.4 & x \le 2.951743156 \\ 1.1\, x^2 + 1.3\, x + 3.1 & 2.951743156 < x \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

ここで得られた q 式のプロットを maxplot という変数で割り当てておきます。

> $maxplot := plot(q, x = -3..5, color = red, view = [default, -10..20], legend = ["red=max"]);$
> $maxplot$

$maxplot := PLOT(\ldots)$

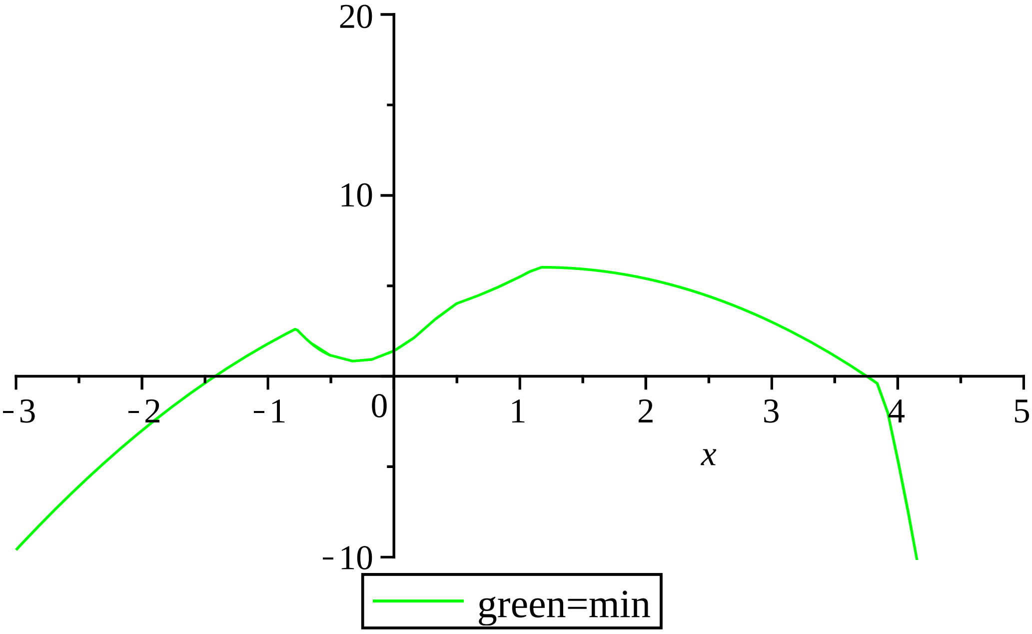


同様に、系の最小を表す区分関数表現を r という変数に用意し、そのプロットを minplot という変数名で生成します。

\> $r := evalf(convert(\min(f, g, h), piecewise))$

$$r := \begin{cases} -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 & x \le -0.7754106773 \\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & x \le 0.4280143493 \\ 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1 & x \le 1.143398113 \\ -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 & x \le 3.874391851 \\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & 3.874391851 < x \end{cases} \tag{5}$$

\> $minplot := plot(r, x = -3..5, color = green, view = [default, -10..20], legend = [\text{"green=min"}]):$
$minplot$



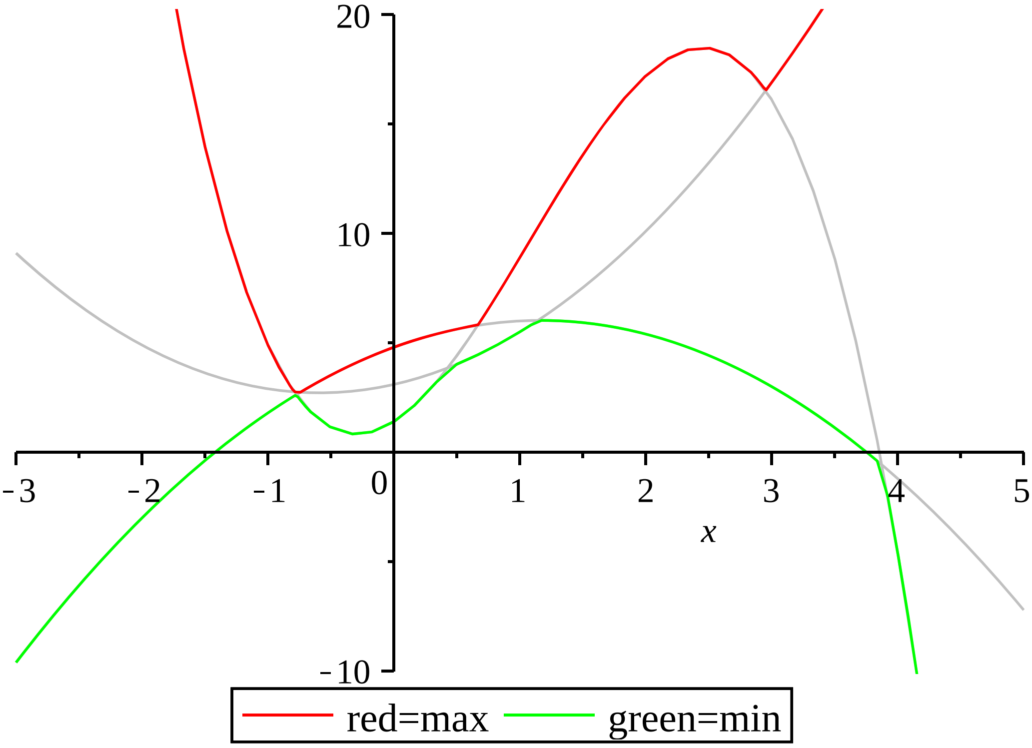
元のプロットを改めてグレー表示にして、次の変数 orgplot に割り当てます。

> $orgplot := plot([f, g, h], x = -3..5, view = [default, -10..20], color = [gray, gray, gray])$

$$orgplot := PLOT(\ldots) \tag{6}$$

最大、最小、元のプロットを合わせて表示してみます。

> $plots[display](orgplot, maxplot, minplot)$



このように、区分関数への変換を用いることで、多項式系 $\{f, g, h\}$ の最大 q , 最小 r を手軽に計算・表示することが可能です。

$q = \max\{f, g, h\}$

> q

$$\begin{cases} -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & x \le -0.7915222107 \\ 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1 & x \le -0.7433981132 \\ -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 & x < 0.6657247085 \\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & x \le 2.951743156 \\ 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1 & 2.951743156 < x \end{cases} \tag{7}$$

$r = \min\{f, g, h\}$

> r

$$\begin{cases} -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 & x \le -0.7754106773 \\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & x \le 0.4280143493 \\ 1.1\,x^2 + 1.3\,x + 3.1 & x \le 1.143398113 \\ -0.9\,x^2 + 2.1\,x + 4.8 & x \le 3.874391851 \\ -1.7\,x^3 + 5.5\,x^2 + 3.7\,x + 1.4 & 3.874391851 < x \end{cases} \tag{8}$$

また、例えばここで得られた最大・最小の区分関数表現を用いて、積分計算を行うことも手軽に実現できます。例えば、$\{f, g, h\}$ の最小である r が $r \ge 0$ となる領域において

$\int_{r1}^{r2} |q - r| \, \mathrm{d}x$ を計算するには、次のような処理手順を取ります；

まず、上記グラフから適当な初期値を指定して $r = 0$ となる零点の近似値を求めます；

> $r1 := fsolve(r, x = -1.2)$

$$r1 := -1.420695783 \quad \textbf{(9)}$$

> $r2 := fsolve(r, x = 3.5)$

$$r2 := 3.754029116 \quad \textbf{(10)}$$

得られた近似値（零点）の範囲から、数値積分を計算します；

> $evalf\left(\int_{r1}^{r2} |q - r| \, \mathrm{d}x\right)$

$$42.72992672 \quad \textbf{(11)}$$

>