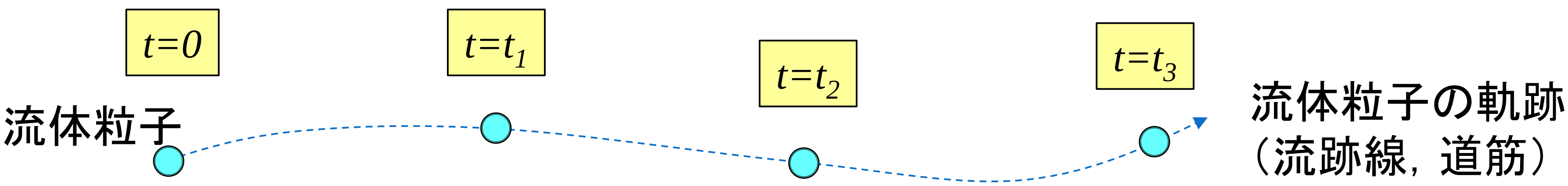
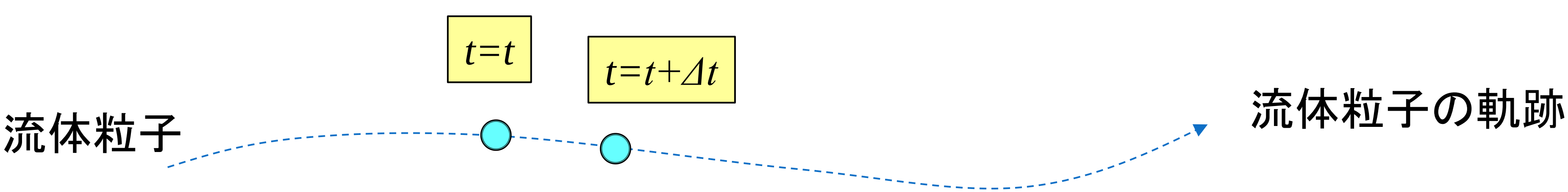
Lagrange微分の考え方

- 一つの流体粒子に着目して，その流体粒子に付随する（流体粒子が持っている）物理量 f の時間的変化率を調べる
  - 物理量 f の例： 流速，圧力，密度，温度など



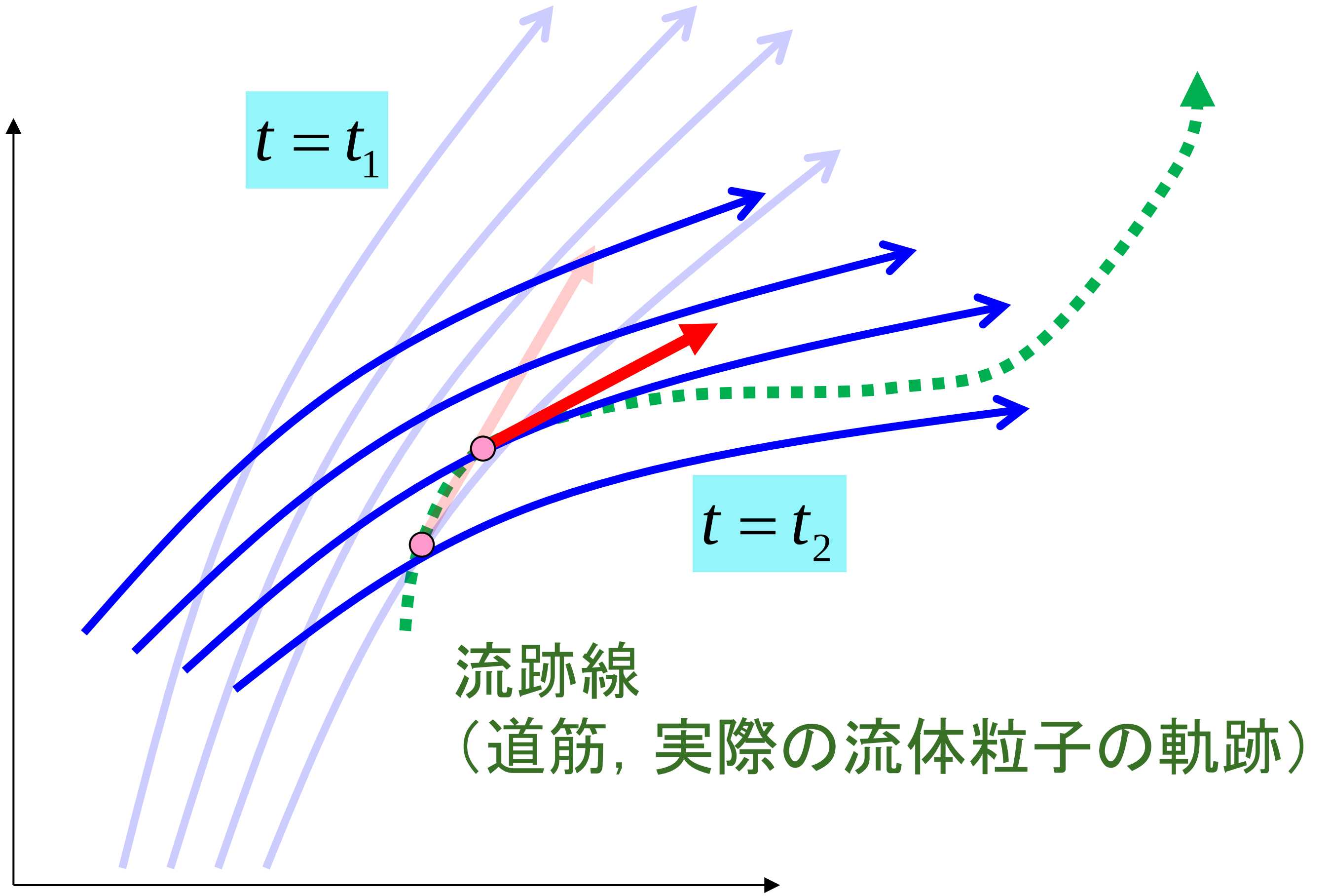
物理量 f は流れに沿って変化していく



$\Delta t \rightarrow 0$ の極限での，その時刻の（その瞬間の）時間的変化率が Df/Dt

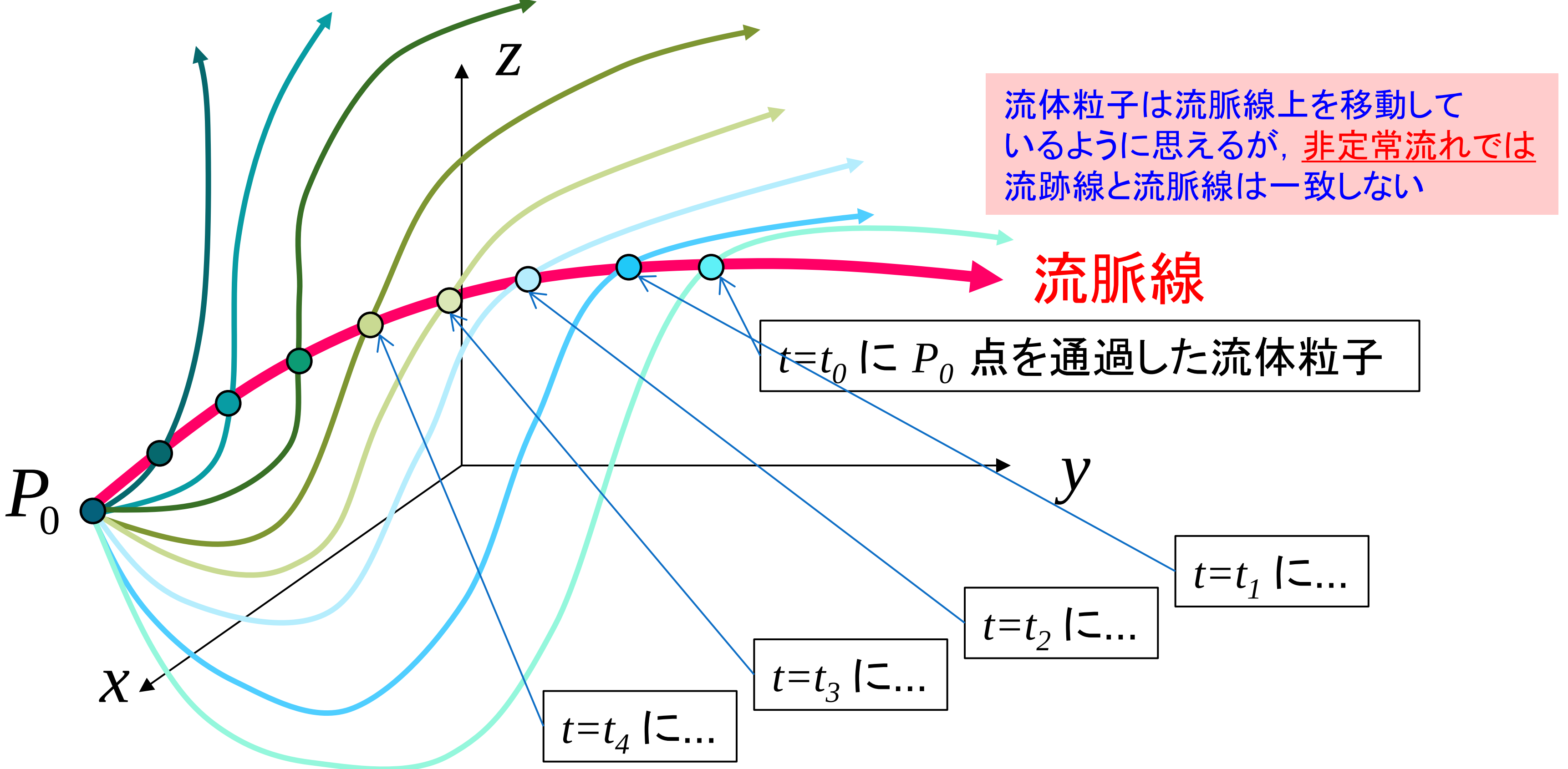
流線（streamline）

- 非定常な流れでは流線は毎時刻異なる
- 流体粒子は時々刻々異なる流線を「乗り換えて」いく



流脈線，色つき流線，流条線（streak line）

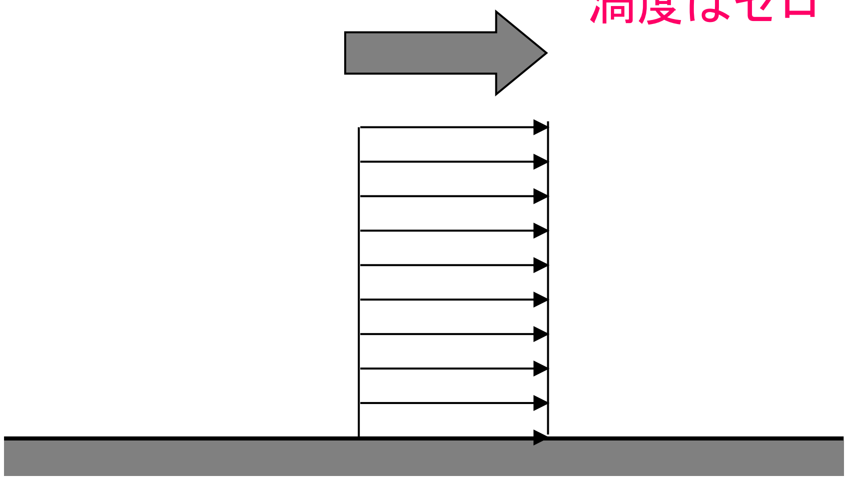
- 定点P_0から流れ出て行く（定点 P_0 を通っていく）流体粒子が描く線
  - 例：「連続的にシャボン玉を放った際の一連のシャボン玉の並びが形成する1本の線」や「煙突からの煙」など
- 非定常流れでは流体粒子は流脈線上を流れてはいかない



物体表面近くの流れと渦度

完全流体の場合

渦度はゼロ

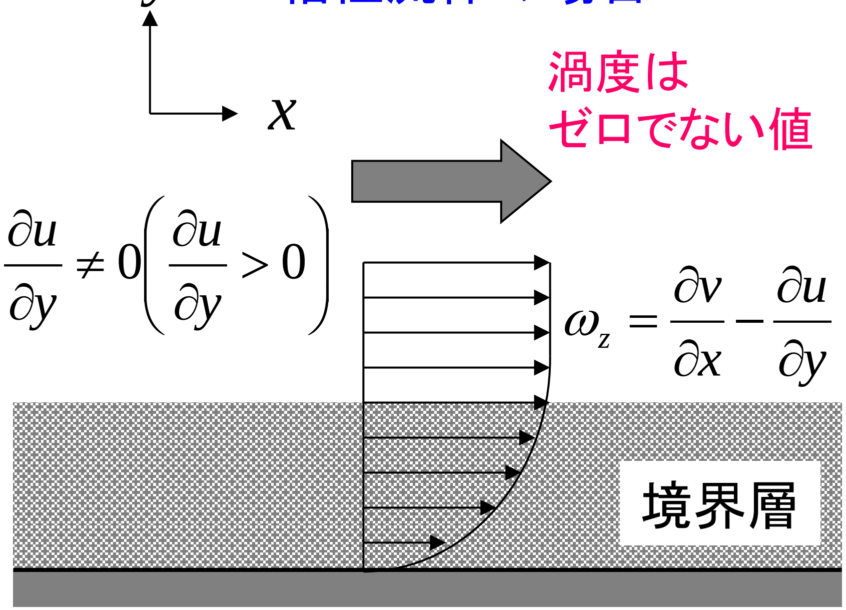


物体

流体は固体表面上を「滑っていく」

粘性流体の場合

渦度は
ゼロでない値



$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} > 0 \right)$$

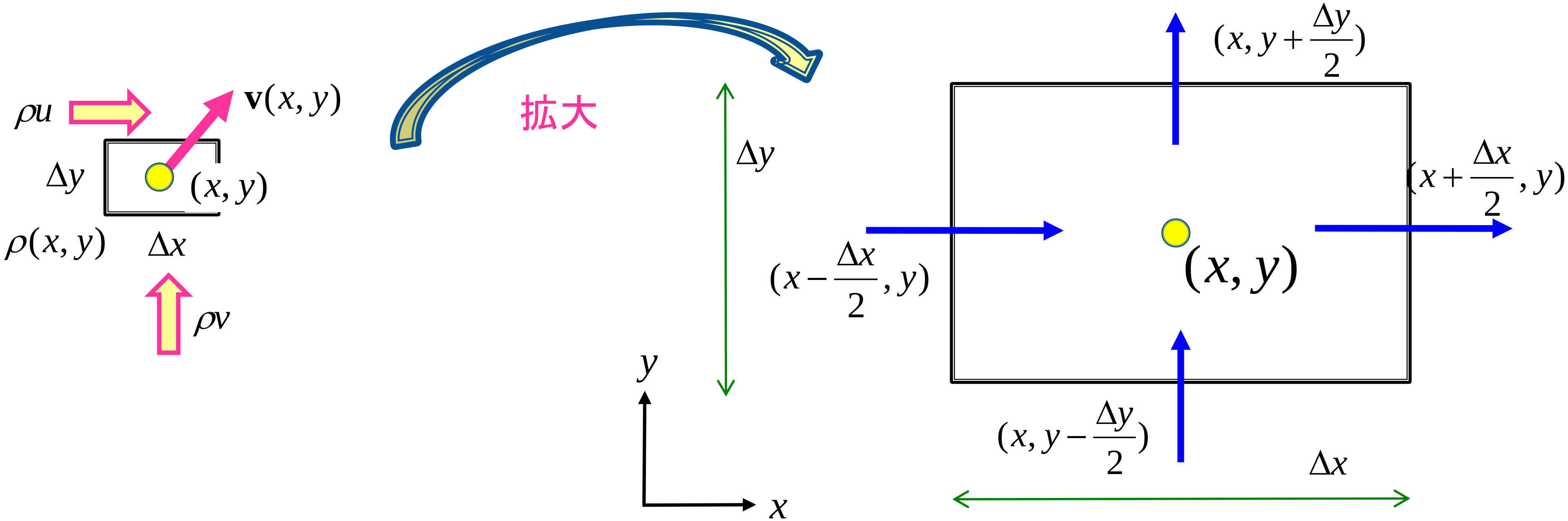
$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} < 0$$

物体

非常に小さい領域（境界層）で
流速が大きく変化する
→　渦あり流れ

連続の式の導出（2次元，定常）

- 2次元の定常な流れ場を考える．速度ベクトル $\mathbf{v}(x,y)=(u,v)$ ， 密度 $\rho(x,y)$ とし，(x,y) を中心とした，各辺の長さが $\Delta x, \Delta y$ の微小な長方形を考えて，この長方形内部から単位時間あたりに外部へ流出する正味の質量（質量の湧き出し）を考える



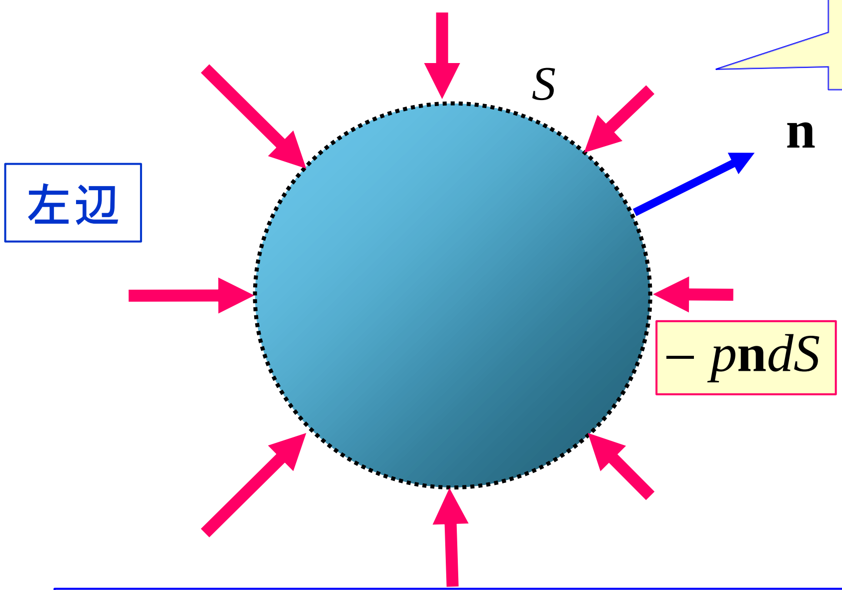
【補足】圧力と圧力勾配

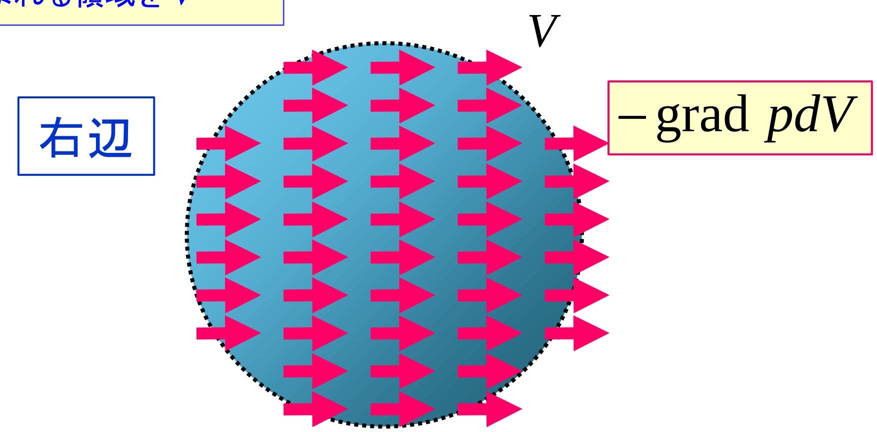
- 先ほど，次のような変形を行った

$$-\iint_S p\mathbf{n}dS = -\iiint_V \mathrm{grad}\ p dV$$

- これは，Gaussの定理を用いて，閉領域表面 S に働く面積力を「閉曲面 S での面積分での表現」から「閉曲面 S によって囲まれた閉領域 V に関する体積分での表現」に変えたもの

流体中の（仮想的な）閉曲面 S，閉曲面 Sによって囲まれる領域を V





S に関する圧力の面積分：
表面での圧力の総和．圧力は，常に「面を垂直に押す方向」なので，結局，圧力の差が「力」となる

V に関する圧力勾配の体積分：
各位置で定義される圧力勾配（単位体積あたりの力）の総和

Bernoulliの定理

- Bernoulliの定理

$$H=\frac{1}{2}q^2+\frac{p}{\rho}+U=\text{const.}$$ （流線に沿って）

において，さらに一様な重力場を仮定する

- すると保存場のポテンシャルは $U=gz$ と表せて，

結局，次式を得る

$$\underbrace{p}_{\text{圧力エネルギー}}+\underbrace{\frac{1}{2}\rho q^2}_{\text{運動エネルギー}}+\underbrace{\rho gz}_{\text{位置エネルギー}}=\text{const.}$$ （流線に沿って）

$$q=|\mathbf{v}|$$

厳密には，単位体積あたりのエネルギー

無次元化とReynolds数

慣性力　圧力　粘性力

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=-\mathrm{grad}p+\mu\Delta\mathbf{v}$$

- 代表長を L，代表速度を U とする
  - これらの値は現象(問題)ごとに異なる
    - 代表長は，円管内部の管内流の場合は管の直径，円柱まわりの流れの場合は円柱の直径
- Navier–Stokes方程式を無次元化する
- 無次元化した変数に「´」を付けて表すと

$$(x,y,z)=L(x',y',z'),\qquad \mathbf{v}=U\mathbf{v}',\qquad t=(L/U)t',\qquad p=\rho U^2p'$$

$$\mathrm{div}=\frac{1}{L}(\mathrm{div}'),\qquad \mathrm{grad}=\frac{1}{L}(\mathrm{grad}'),\qquad \Delta=\frac{1}{L^2}(\Delta')$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x'}\cdot\frac{dx'}{dx}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x'}$$

- 非圧縮性流れの連続の式とNavier–Stokes方程式は次のようになる

$$\mathrm{div}'\mathbf{v}'=0$$

$$\frac{D\mathbf{v}'}{Dt'}=-\mathrm{grad}'p'+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta'\mathbf{v}'$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho UL}{\mu}=\frac{UL}{\nu}$$（ ν ：動粘性係数）

Reynolds数