つくる情熱を、支える情熱。

CYBERNET

サンプルテキスト

FEM原理講座

サイバネットシステム株式会社
2008年10月9日作成

CAE UNIVERSITY

サンプルテキストについて

- 各講師が「講義の内容が伝わりやすいページ」を選びました。
- テキストのページは必ずしも連続していません。一部を抜粋しています。
- 幾何光学講座については、実物のテキストではなくガイダンスを掲載いたします。

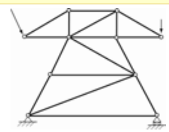
固体・構造のFEM

対象とする構造系（物理モデル）	
連続体・固体 （弾性体／弾塑性体／粘弾性体／…）	構造 （ばね／骨組み／板・シェル）
構造物の境界値問題を定義する支配方程式（数理モデル）	
連立偏微分方程式 平衡方程式（運動方程式）／変位-ひずみ関係式 ／応力-ひずみ関係式 ／変位境界条件／荷重境界条件／初期条件	剛性方程式 一般化力と変位関係 ／支持条件／荷重条件
離散化解析手法	マトリックス構造解析法
古典的近似解法 重み付き残差法（選点法／モーメント法／Galerkin法） Ritz法 有限要素法（Finite Element Method: FEM） 弱形式（大域形）／要素単位の離散化 仮想仕事の原理／変分法／エネルギー原理 差分法（Finite Difference Method: FDM） 強形式（局所形）／格子点周りの離散化 境界要素法（Boundary Element Method: BEM） 境界積分方程式／Green関数の利用	・構造力学 ・行列計算 要素（部材）ごとの剛性方程式から全体系の剛性方程式へ

K. Terada, Tohoku University

マトリックス構造解析手法とFEM

マトリックス構造解析法

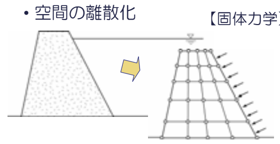


【構造力学】
- 解析対象を元々離散的な構造系としてモデル化

有限要素法（FEM）

- 解析対象の数理モデル化
- 空間の離散化

【固体力学】

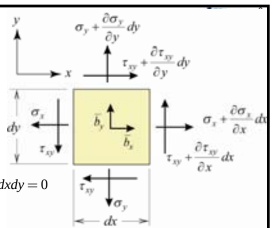


- 支配方程式の離散化

- 部材（要素）ごとに剛性方程式
- 全体系の剛性方程式
- 求解　　共通
  （連立一次方程式を解く）
- 後処理
  （部材（要素）に働く力や変形などを算定）

K. Terada, Tohoku University

応力のつり合い式



x 方向の力のつり合い：

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{xy} dx + \bar{b}_x dxdy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{b}_x = 0$$

y 方向の力のつり合い：

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{b}_y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

OR

$$\boxed{\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\boldsymbol{b}} = \mathbf{0}} \quad \text{ここで} \quad \boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

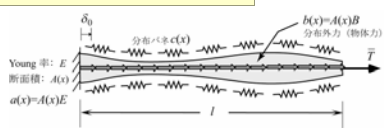
応　力 $\boldsymbol{\sigma}$ ：[力/面積]= $[\mathrm{F/L^2}]$
物体力 $\bar{\boldsymbol{b}}$ ：[力/体積]= $[\mathrm{F/L^3}]$

K. Terada, Tohoku University

弱形式：大域形の支配方程式

強形式

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) + c(x)u(x) = b(x) \ \text{ in } \ (0,l) \\ u(0) = \delta_0 \\ a\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=l} = \bar{T} \end{cases}$$



弱形式（仮想仕事式）

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^l a(x)\frac{du^*(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}dx + \int_0^l c(x)u^*(x)u(x)dx = \int_0^l b(x)u^*(x)dx + u^*(l)\bar{T} \\ u(0) = \delta_0 \quad \text{and} \quad \forall u^*;\ \ u^*(0) = 0 \end{cases}$$

K. Terada, Tohoku University

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^l \frac{dv_h(x)}{dx}\frac{du_h(x)}{dx}dx + \int_0^l v_h(x)u_h(x)dx = v_h(l)\bar{T} \\ u_h(0) = \delta_0 \quad \text{and} \quad \forall v_h;\ v_h(0) = 0 \end{cases}$$

離散化

$$u(x) \approx u_h(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{U}$$

$$v(x) \approx v_h(x)) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{V}$$

形式的にはGalerkin法

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$$

剛性方程式

$$\boldsymbol{K} = \int_0^l \frac{d\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}}{dx} a \frac{d\boldsymbol{N}}{dx} dx + \int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} c \boldsymbol{N} dx$$

$$\boldsymbol{F} = \int_0^l \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \left(b - \delta_0 c\right) dx + \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(l)\bar{T}$$

支配方程式の離散化

～無限次元から有限次元へ～

- 無限次元の問題における支配方程式（仮想仕事式＝弱形式）

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^l a(x)\frac{du^*(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}dx + \int_0^l c(x)u^*(x)u(x)dx = \int_0^l b(x)u^*(x)dx + u^*(l)\bar{T} \\ u(0) = \delta_0 \quad \text{and} \quad \forall u^*;\ u^*(0) = 0 \end{cases}$$

  - 各点 x での変数が未知（未知数＝自由度が無限個）
- 有限次元の問題に変換【離散化】
  - 事前に，既知の関数の重ね合わせとして未知数の関数形を仮定する

$$u(x) \approx \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{Bmatrix}}_{\text{基底関数 (basis function)}} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\alpha_i$$

未知パラメータ

無限次元の問題における支配方程式に代入

離散化

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

離散化方程式

  - 基底関数の組は一次独立
  - 基底関数に乗ずるパラメータが未知
（未知数＝自由度が有限個）

要素 e の形状関数

変位関数を $u(x) \approx u_h(x) = a + bx = \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ ・・・(#)　と仮定（近似）する.

各節点上で、変位値を取るように要請すれば、

$$u_h(x_1^e) := u_1^e = a + bx_1^e = \begin{Bmatrix} 1 & x_1^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$u_h(x_2^e) := u_2^e = a + bx_2^e = \begin{Bmatrix} 1 & x_2^e \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} \qquad \left(h_e = x_2^e - x_1^e\right)$$

この係数をもとの仮定した変位(#)に戻せば、

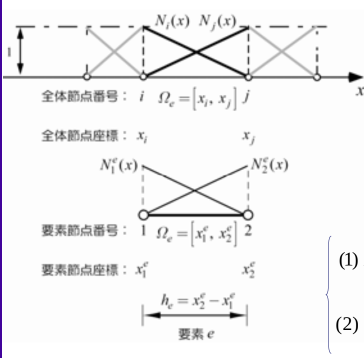
$$u(x) \approx u_h(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} x_2^e & -x_1^e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^e(x) & N_2^e(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e$$

のように新たに未知変数を節点変位として近似関数を定義できる。

ここで、 $N_1^e(x) = \dfrac{x_2^e - x}{h_e}$, $N_2^e(x) = \dfrac{x - x_1^e}{h_e}$ が「***形状関数***」(shape function)

となる

要素における節点の番号付けと形状関数



$$\begin{cases} N_1^e(x) = \dfrac{x_2^e - x}{h_e} \\ N_2^e(x) = \dfrac{x - x_1^e}{h_e} \end{cases}$$

(1) $N_\alpha^e(x_\beta^e) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$

(2) $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2} N_\alpha^e(x) = 1$

形状関数による変位の補間近似とひずみ・応力の近似

$$u(x) \approx u_h(x) = \frac{1}{h_e}\left\{x_2^e - x \quad x - x_1^e\right\}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

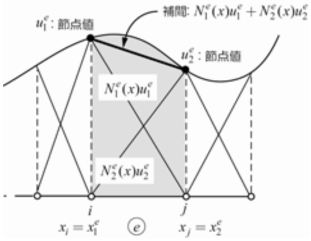
$$= \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{d}_e = \left\{N_1^e(x) \quad N_2^e(x)\right\}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_h = \frac{d\boldsymbol{N}_e}{dx}\boldsymbol{d}_e = \frac{1}{h_e}\{-1 \quad 1\}\begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{u_2^e - u_1^e}{h_e}$$

$$\sigma_h = E\varepsilon = E\frac{u_2^e - u_1^e}{h_e}$$

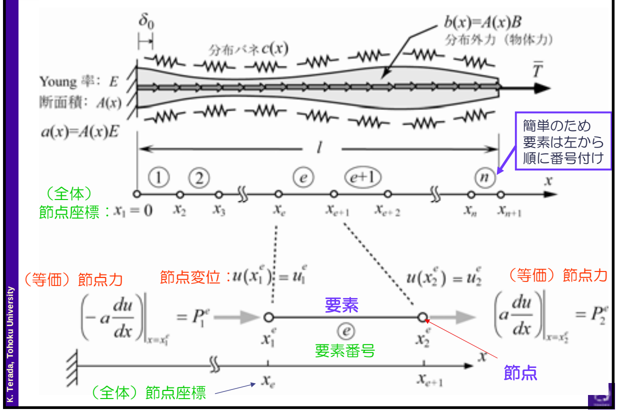
節点値を用いた変位の補間近似



Note:
形状関数≒補間関数＝内挿関数（interpolation function）

K. Terada, Tohoku University

要素による領域分割



K. Terada, Tohoku University

“要素”についての方程式

$$\int_0^l a\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}dx + \int_0^l cv_h u_h dx = \int_0^L v_h b dx + v_h(l)\bar{T} \quad \forall v_h(x) \text{ with } v_h(0) = 0$$

要素 e (e=1,…,n)について成り立つ弱形式（仮想仕事式）

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} cv_h u_h dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} v_h b dx + v_h(x_1^e)P_1^e + v_h(x_2^e)P_2^e$$

$$\text{if } x_1^e = 0 \text{ (i.e., } e = 1) \Rightarrow u_1^e = 0$$

$$\text{if } x_2^e = l \text{ (i.e., } e = n) \Rightarrow P_2^e = \bar{T}$$

Note:

$$\int_0^l a\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}dx = \sum_{e=1}^{n}\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}dx$$

K. Terada, Tohoku University

形状関数を用いた変位の近似関数を仮想仕事式に代入

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{dv_h}{dx}\frac{du_h}{dx}dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} cv_h u_h dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} v_h b dx + v_h(x_1^e)P_1^e + v_h(x_2^e)P_2^e$$

代入して、

$$u_h(x) = \boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}_e \quad \text{and} \quad v_h(x) = \boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e$$

$$\text{where} \quad \boldsymbol{N}_e = \left\{N_1^e(x) \quad N_2^e(x)\right\}, \quad \boldsymbol{d}_e = \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{d}_e = \begin{Bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{d(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e)}{dx}\frac{d(\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}_e)}{dx}dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} c(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}^e)(\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}^e)dx$$

$$= \int_{x_1^e}^{x_2^e}(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e)bdx + \boldsymbol{N}_e(x_1^e)\delta\boldsymbol{d}_e P_1^e + \boldsymbol{N}_e(x_2^e)\delta\boldsymbol{d}_e P_2^e$$

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\left[\frac{d(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e)}{dx}\right]^{\mathrm{T}}\frac{d(\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}_e)}{dx}dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} c(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}_e)dx$$

$$= \int_{x_1^e}^{x_2^e}(\boldsymbol{N}_e\delta\boldsymbol{d}_e)^{\mathrm{T}}bdx + \left(\boldsymbol{N}_e(x_1^e)\delta\boldsymbol{d}_e\right)^{\mathrm{T}} P_1^e + \left(\boldsymbol{N}_e(x_2^e)\delta\boldsymbol{d}_e\right)^{\mathrm{T}} P_2^e$$

K. Terada, Tohoku University

$$\delta \boldsymbol{d}_e^{\mathrm{T}}\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{d(\boldsymbol{N}_e)^{\mathrm{T}}}{dx}\frac{d\boldsymbol{N}_e}{dx}dx+\int_{x_1^e}^{x_2^e} c\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e dx\right]\boldsymbol{d}_e$$

$$=\delta \boldsymbol{d}_e^{\mathrm{T}}\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}bdx+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_1^e)P_1^e+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_2^e)P_2^e\right]$$

$\delta\boldsymbol{d}_e$ が任意だから,

$$\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{d(\boldsymbol{N}_e)^{\mathrm{T}}}{dx}\frac{d\boldsymbol{N}_e}{dx}dx+\int_{x_1^e}^{x_2^e} c\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e dx\right]\boldsymbol{d}_e=\left[\int_{x_1^e}^{x_2^e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}bdx+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_1^e)P_1^e+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_2^e)P_2^e\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{F}_e}$$

where

$$\boldsymbol{K}_e=\int_{x_1^e}^{x_2^e} a\frac{d\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}}{dx}\frac{d\boldsymbol{N}_e}{dx}dx+\int_{x_1^e}^{x_2^e} c\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e dx$$

$$\boldsymbol{F}_e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}bdx+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_1^e)P_1^e+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_2^e)P_2^e$$

ここで、 $N_1^e(x)=\dfrac{x_2^e-x}{h_e},\quad N_2^e(x)=\dfrac{x-x_1^e}{h_e}$

なので、要素内で $a(x)=a_e,\ c(x)=c_e,\ b(x)=b_e$ が一定と仮定すれば、

$$\boldsymbol{K}_e=\int_{x_1^e}^{x_2^e} a_e\frac{d\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}}{dx}\frac{d\boldsymbol{N}_e}{dx}dx+\int_{x_1^e}^{x_2^e} c_e\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_e dx$$

$$=\frac{a_e}{h_e}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\frac{1}{h_e}\{-1\quad 1\}h_e+\frac{c_eh_e}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\boxed{\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}+\frac{c_eh_e}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}}$$

要素剛性行列

$$\boldsymbol{F}_e=\int_{x_1^e}^{x_2^e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}bdx+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_1^e)P_1^e+\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_2^e)P_2^e$$

$$=b_e\int_{x_1^e}^{x_2^e}\frac{1}{h_e}\begin{Bmatrix}x_2^e-x\\x-x_1^e\end{Bmatrix}dx+\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}P_1^e+\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}P_2^e$$

$$=\boxed{\frac{b_eh_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^e\\P_2^e\end{Bmatrix}}$$

要素荷重ベクトル

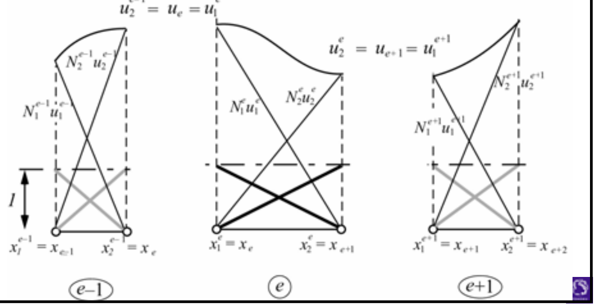
$$\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_2^e)=\begin{Bmatrix}N_e^1(x_2^e)\\N_e^2(x_2^e)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}(x_1^e)=\begin{Bmatrix}N_e^1(x_1^e)\\N_e^2(x_1^e)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$$

変位の連続条件

要素 e-1 の第2節点の変位　　全体節点番号 e の変位　　要素 e の第１節点の変位

$$u_2^{e-1}=u_e=u_1^e$$



変位の連続条件を用いた剛性行列の組み立て（アセンブリング）の例

$c(x)$=0 のとき

element			nodal displacement	[自由度]
①	$\dfrac{a_1}{h_1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^1\\u_2^1\end{Bmatrix}=\dfrac{b_1h_1}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^1\\P_2^1\end{Bmatrix}$	⇔	$\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}$	1 2
…				…
e	$\dfrac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\u_2^e\end{Bmatrix}=\dfrac{b_eh_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^e\\P_2^e\end{Bmatrix}$	⇔	$\begin{Bmatrix}u_e\\u_{e+1}\end{Bmatrix}$	e e+1
e+1	$\dfrac{a_{e+1}}{h_{e+1}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{e+1}\\u_2^{e+1}\end{Bmatrix}=\dfrac{b_{e+1}h_{e+1}}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{e+1}\\P_2^{e+1}\end{Bmatrix}$	⇔	$\begin{Bmatrix}u_{e+1}\\u_{e+2}\end{Bmatrix}$	e+1 e+2
…				…
n	$\dfrac{a_n}{h_e}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^n\\u_2^n\end{Bmatrix}=\dfrac{b_nh_n}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^n\\T\end{Bmatrix}$	⇔	$\begin{Bmatrix}u_n\\u_{n+1}\end{Bmatrix}$	n n+1

3要素で分割（分布ばねを無視）する場合

$$\frac{a_e}{h_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\end{Bmatrix}=\frac{b_e h_e}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^e\\ P_2^e\end{Bmatrix}\quad(\ \boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{F}_e\ )$$

$$\text{element(1)}:\ \frac{EA}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}\\ u_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ P_2^{(1)}\end{Bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}$$

$$\text{element(2)}:\ \frac{EA}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}\\ u_2^{(2)}\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(2)}\\ P_2^{(2)}\end{Bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}$$

$$\text{element(3)}:\ \frac{EA}{h}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}\\ u_2^{(3)}\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(3)}\\ P_2^{(3)}\end{Bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{Bmatrix}u_3\\ u_4\end{Bmatrix}$$

組み立て ⇨ 全体剛性方程式　$(\boldsymbol{Kd}=\boldsymbol{F}\ )$
（アセンブリング）

全体節点変位ベクトル

$$\underbrace{\frac{EA}{h}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}}_{\text{全体剛性行列}}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\underbrace{\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ P_2^{(1)}+P_1^{(2)}\\ P_2^{(2)}+P_1^{(3)}\\ P_2^{(3)}\end{Bmatrix}}_{\text{全体荷重ベクトル}}$$

節点荷重・荷重境界条件・変位境界条件の反映

$P_1^{(1)}$: reaction (unknown)

$P_2^{(1)}+P_1^{(2)}=0$

$P_2^{(2)}+P_1^{(3)}=0$

$P_2^{(3)}=\bar{T}$

$$\Rightarrow\quad\frac{EA}{h}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}u_1 & u_2 & u_3 & u_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ 0\\ 0\\ \bar{T}\end{Bmatrix}$$

拘束条件（変位境界条件：　$u(0)=\delta_0$　）を考慮して，方程式を縮約

$$\underbrace{\frac{EA}{h}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{\text{特異}}\begin{Bmatrix}\delta_0\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_1^{(1)}\\ 0\\ 0\\ \bar{T}\end{Bmatrix}$$

・・・（※※）

$(\boldsymbol{Kd}=\boldsymbol{F}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{R}}\boldsymbol{d}^{\mathrm{R}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{R}})$

⇨ 縮約された剛性方程式

$$\frac{EA}{h}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}}_{\text{正則}}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\frac{bh}{2}\begin{Bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \bar{T}\end{Bmatrix}-\frac{EA}{h}\begin{Bmatrix}-\delta_0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

線形弾性体のFEM（メインルーチン／ソルバー）

- 解析データ（FEMモデル）の読み込み
- 全体剛性方程式の組み立て

全要素についてループ

$\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{F}_e$ ：要素剛性方程式

$$\boldsymbol{K}_e=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{B}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e d\Omega$$

$$\boldsymbol{F}_e=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}d\Omega+\int_{\partial\Omega_e}\boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}d\Gamma$$

$\boldsymbol{Kd}=\boldsymbol{F}$ ：全体剛性方程式の組み立て

- 剛性方程式を解いて節点変位 $\boldsymbol{d}$ を求める
- 後処理（ポストプロセス）：応力・ひずみの算定

$$\boldsymbol{d}_e\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\varepsilon}\approx\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{N}_e\boldsymbol{d}_e=\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{d}_e$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\approx\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{d}_e$$

要素に関する仮想仕事式（弱形式）

$$\int_{\partial\Omega_e}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_e h_e ds=\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega_e^{[i]}}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_e^{[i]}h_e ds$$

(A)

$$\int_{\Omega_e}(\boldsymbol{\partial}\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u}h_e dA=\int_{\Omega_e}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}}h_e dA+\int_{\partial\Omega_e}\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_e h_e ds\quad\forall\delta\boldsymbol{u}$$

(B)

$$\int_{\Omega_e}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\delta u}{\partial x} & \dfrac{\partial\delta v}{\partial y} & \dfrac{\partial\delta v}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta u}{\partial y}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11}^e & D_{12}^e & D_{31}^e\\ D_{12}^e & D_{22}^e & D_{23}^e\\ D_{31}^e & D_{23}^e & D_{33}^e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{dv}{dx}+\dfrac{du}{dy}\end{Bmatrix}h_e dA$$

$$=\int_{\Omega_e}\{\delta u\quad\delta v\}\begin{Bmatrix}\bar{b}_x\\ \bar{b}_y\end{Bmatrix}h_e dA+\int_{\partial\Omega_e}\{\delta u\quad\delta v\}\begin{Bmatrix}s_e\\ t_e\end{Bmatrix}h_e ds\quad\forall\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{Bmatrix}$$

ただし、要素のz方向の厚さを h_e として

$$dV=h_e dA\ \text{ and }\ dS=h_e ds$$

とおいた。